Κ. ΚΑΡΟΥΜΠΑΛΟΥ
ΤΑΚΤ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ
Κ. ΒΑΛΕΟΝΤΗ
ΦΥΣΙΚΟΥ
ΡΑΔΙΟΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ

εφαρμοσμενος ηλεκτρομαγνητισμος

ΑΘΗΝΑ 1979

Κ. ΚΑΡΟΥΜΠΑΛΟΥ
ΤΑΚΤ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ
Κ. ΒΑΛΕΟΝΤΗ
ΦΥΣΙΚΟΥ
ΡΑΔΙΟΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥ

εφαρμοσμενος ηλεκτρομαγνητισμος

ΑΘΗΝΑ 1979

Κάθε γνήσιο άντίτυπο ὑπογράφεται ἀπό ἕνα ἐκ τῶν συγγραφέων.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τό βιβλίο αὐτό περιέχει τίς παραδόσεις πού ἔκανε ὁ καθηγητής κ. Κ. Καρούμπαλος τό 1975-76 στό Α΄ ἔτος τῶν Μεταπτυχιακῶν"Ἐνδεικτικῶν Ἠλεκτρονικῆς" τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, στό μάθημα τοῦ Ἠλεκτρομαγνητισμοῦ.

Τό ἀρχικό κείμενο βελτιώθηκε καί συμπληρώθηκε σέ συνεργασία μέ τόν Ραδιοηλεκτρολόγο Φυσικό κ. Κ. Βαλεοντῆ, ὁ ὁποῖος συνέταξε καί τό μέρος τῶν προβλημάτων.

Σκοπός μας ἦταν νά δώσουμε ἕνα αὐτόνομο, συνεπτυγμένο κείμενο, πού ν'ἀναδείχνει, κατά τρόπο ἐπαγωγικό, ἐκεῖνα κυρίως τά θέματα ἀπό τό μεγάλο καί ὡραῖο κεφάλαιο τοῦ Ἠλεκτρομαγνητισμοῦ, πού συναντᾶ συχνά ὁ ἐφαρμοσμένος φυσικός καί ὁ ἐπιστήμονας τηλεπικοινωνιακός μηχανικός.

Πρόθεσή μας ἦταν νά καλύψουμε ,ἔτσι, ἕνα κενό πού ὑπάρχει, κατά τή γνώμη μας, στήν περιοχή αὐτή τῆς ἑλληνικῆς βιβλιογραφίας.

Ἐπιδιώκαμε, ὅμως, ἡ διαπραγμάτευση τῶν κλασικῶν αὐτῶν ἐφαρμογῶν τοῦ Ἠλεκτρομαγνητισμοῦ, διατηρώντας τήν ἀναγνωρισμένη ἐπιστημονική καί μεθοδολογική της ἀξία, νά παραμένει προσιτή στόν ἀναγνώστη χωρίς τήν ἀνάγκη ἀναδρομῶν σέ ἐκτενέστερα, αὐστηρότερα, ἀλλά κάποτε δύσβατα συγγράμματα. Ἄν πραγματικά πετύχαμε στήν ἐπιθυμία μας αὐτή, τότε τό βιβλίο θά εἶναι χρήσιμο, ἐκτός ἀπό τόν μεταπτυχιακό, καί στόν ἀπαιτητικό προπτυχιακό σπουδαστή.

Τό βιβλίο περιέχει βασικά ἑπτά κεφάλαια καί 108 προβλήματα.

Τό πρῶτο κεφάλαιο περιλαμβάνει μιά μεθοδική ἀνάπτυξη τῶν ἀπαραίτητων μαθηματικῶν γνώσεων, καί ἔχει κύριο σκοπό ν' ἀπελευθερώσει τόν ἀναγνώστη ἀπό ἕνα εἰδικό σύστημα συντεταγμένων καί νά τόν ἐξοικειώσει μέ τίς ἐκφράσεις καί τή χρήση τῶν τελεστῶν τῆς διανυσματικῆς ἀνάλυσης.

Ἀπό τά ὑπόλοιπα ἕξι κεφάλαια, τά τρία πρῶτα, δηλ. τά 2,3 καί 4, συνιστοῦν οὐσιαστικά ἕνα πρῶτο μέρος, ὅπου δίνονται οἱ βασικές θεωρητικές γνώσεις κατά τρόπο προσανατολισμένο στό ἀντικείμενο τοῦ βιβλίου. Ἔτσι:

Στό κεφάλαιο 2 δίνονται οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell καί οἱ σχετικοί φυσικοί νόμοι, τούς ὁποίους ἐκφράζουν. Δίνεται ἀκόμα ἡ ἐξίσωση τῆς συνέχειας, καί γίνεται ἁπλούστευση τῶν ἐξισώσεων γιά τήν περίπτωση ἁρμονικῶν πεδίων καί πηγῶν.

Στό κεφάλαιο 3 ὁρίζονται τά δυναμικά (μονόμετρο Φ καί διανυσματικό $\vec{A}$) καί διατυπώνεται, μέ τή βοήθεια τῶν θεμελιωδῶν ἐξισώσεων, ἡ διαφορική ἐξίσωση τοῦ κύματος, εἴτε μέ τή βοήθεια τῶν δυναμικῶν εἴτε μέ τή βοήθεια τῶν πεδίων· συνδέονται, ἔτσι τά πεδία μέ τίς πηγές τους (φορτία χώρου ρ καί ρεύματα $\vec{J}$).

Μιά πρώτη λύση τῶν "ὁμογενῶν" ἐξισώσεων (χωρίς πηγές διέγερσης) καί ἡ διερεύνησή της γιά ἐπίπεδο μονοχρωματικό κύμα, δίνει τήν εὐκαιρία ν' ἀναδειχτεῖ ἡ σημασία τῶν διάφορων παραμέτρων τοῦ μέσου διάδοσης καί νά γίνει ἡ σύνδεσή τους μέ τά χαρακτηριστικά τοῦ κύματος. Στή συνέχεια, δείχνεται πῶς ἡ ἀρχή τῆς διατήρησης τῆς ἐνέργειας ὁδηγεῖ στό θεώρημα τοῦ Poynting, ὁρίζεται τό διάνυσμα Poynting $\vec{P}$ καί γίνεται ἡ μαθηματική καί φυσική του διερεύνηση γιά τυπικές περιπτώσεις. Ἀκολουθεῖ ἡ μελέτη τῶν μή ὁμογενῶν ἐξισώσεων, ἡ ἐπίλυση γιά τήν περίπτωση ἁρμονικῶν πηγῶν διέγερσης καί ἡ διατύπωση τῶν "καθυστερημένων δυναμικῶν". Τέλος, τό κεφάλαιο αὐτό κλείνει μέ τήν τόσο βασική μελέτη τῆς ἀκτινοβολίας στοιχειώδους ἠλεκτρικοῦ καί στοιχειώδους μαγνητικοῦ διπόλου, μελέτη πού γίνεται ὅσο τό δυνατό πληρέστερα γιά ἁρμονικό ρεῦμα διέγερσης.

Τό σύντομο κεφάλαιο 4 εἶναι ἀφιερωμένο στό σημαντικό γιά τίς ἐφαρμογές θέμα τῶν συνθηκῶν στά ὅρια. Μετά τή γενική μελέτη, ἀντιμετωπίζονται οἱ ἀκραῖες εἰδικές περιπτώσεις (τελείως ἀγώγιμων καί τελείως μονωτικῶν μέσων) καί συνοψίζονται τά σχετικά συμπεράσματα.

Τά τρία κεφάλαια 5, 6 καί 7 συνιστοῦν οὐσιαστικά τό δεύτερο μέρος τοῦ βιβλίου. Στό μέρος αὐτό γίνεται ἐφαρμογή τῶν ἀρχῶν τοῦ ἠλεκρομαγνητισμοῦ στούς κυματοδηγούς καί τά ἀντηχεῖα, στή διάδοση μέσα ἀπό ἰονισμένα μέσα καί τέλος στή μελέτη τῆς πόλωσης τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος καί τῶν ἄριστων συνθηκῶν ζεύξης τοῦ κύματος μέ κεραία γνωστῶν χαρακτηριστικῶν πόλωσης. Εἰδικότερα:

Στό κεφάλαιο 5, μετά ἀπό μιά γενική παρουσίαση τοῦ θέματος τῆς κυματοδήγησης καί τήν ταξινόμηση τῶν διάφορων "κυματικῶν τύπων" (modes) πού μπορεῖ ν' ἀκολουθήσουν τά "τρέχοντα" κύματα μέσα στόν κυματοδηγό, γίνεται λεπτομερέστερη μελέτη τόσο τοῦ ὀρθογώνιου ὅσο καί τοῦ κυκλικοῦ κυλινδρικοῦ κυματοδηγοῦ. Καί στίς δύο περιπτώσεις ἡ μελέτη ἐξειδικεύεται τελικά στή διερεύνηση ἀφενός τοῦ "ἐγκάρσιου κυματικοῦ τύπου" TE καί ἀφετέρου τοῦ "ἐγκάρσιου μαγνητικοῦ τύπου" TM.

Εἶναι γνωστό πώς τό ἐνδιαφέρον τῆς μελέτης τῶν κυλινδρικῶν κυματοδηγῶν ἀνανεώθηκε θεαματικά τά τελευταῖα χρόνια ἐξαιτίας τοῦ ὅτι γίνεται ὅλο καί πιό εὐρύτερη χρήση τῶν κυματοδηγῶν φωτός (optical fibers).

Παρόλο πού δέν ἔγινε δυνατό, στήν πρώτη αὐτή ἔκδοση, νά συμπεριληφθεῖ ἡ μελέτη τέτοιων ὀπτικῶν κυματοδηγῶν, δόθηκε ἰδιαίτερη ἔμφαση στή θεωρητική μελέτη τῶν κυκλικῶν κυλινδρικῶν κυματοδηγῶν. Στό θέμα αὐτό ἀφιερώθηκε καί ἕνα "παράρτημα".

Ἡ φυσιολογική συμπλήρωση τοῦ κεφαλαίου 5 γίνεται μέ τή μελέτη ἠλεκτρομαγνητικῶν ἀντηχείων. Περιοριστήκαμε στή μελέτη τῶν "στάσιμων κυματικῶν τύπων" σέ δύο μόνο μορφές ἀντηχείων: τό ὀρθογώνιο καί τό κυλινδρικό. Ἡ μελέτη, ὅμως, ἔγινε μέ τρόπο πού ἐπιτρέπει τή γενί-

κευση καί στό τέλος τοῦ κεφαλαίου ὑποδείχνεται τό ἐνδιαφέρον ἄλλων πρακτικῶν μορφῶν ἀντηχείων γιά τίς μικροκυματικές διατάξεις καθώς καί ὁ τρόπος σύζευξής τους μέ "γραμμή μεταφορᾶς" γιά τή διέγερση ἤ τήν ἀπαγωγή ἐνέργειας.

Στό κεφάλαιο 6 ἐπιχειρεῖται ἡ ἁπλοποιημένη μελέτη ἑνός δύσκολου θέματος: τῆς διάδοσης ΗΜ κύματος μέσα ἀπό ἰονισμένο μέσο παρουσία μαγνητικοῦ πεδίου (ψυχρό μαγνητόπλασμα). Ἀποδείχνεται, ἀρχικά, ὅτι ἡ εὐκινησία κι' ἐπομένως καί ἡ εἰδική ἀγωγιμότητα σ στό μέσο αὐτό εἶναι τανυστικά μεγέθη. Ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell προκύπτει ὅτι τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τήν "ἐνεργό διηλεκτρική σταθερά" ε κι' ἐπομένως καί γιά τό δείκτη διάθλασης n τοῦ ὑλικοῦ δηλ. τό ὑλικό εἶναι ἀνισότροπο.

Ἀπό τή διερεύνηση τῶν τανυστῶν σ καί ε γιά διάφορες τιμές τῆς συχνότητας ω τοῦ κύματος καί τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου $\vec{B}$, προκύπτουν πολύ χρήσιμα συμπεράσματα γιά τίς συνθῆκες πού εὐνοοῦν τήν ἐκδήλωση γνωστῶν φαινομένων μεγάλου ἐνδιαφέροντος (φαινόμενο Hall, γυρομαγνητικός συντονισμός, μαγνητοαντίσταση, ἀποκοπή πλάσματος). Παράλληλα, ἡ διατύπωση τῆς ἐξίσωσης διασπορᾶς (dispersion relation) καί ἡ διερεύνηση τῆς σταθερᾶς διάδοσης ἑνός ἐπίπεδου μονοχρωματικοῦ κύματος(ω, $\vec{k}$), ὁδηγεῖ σέ κλασικά ἀποτελέσματα γιά τήν δυνατότητα διάδοσης ΗΜ-κύματος κατά τίς διάφορες, ἀναφορικά μέ τό $\vec{B}$, διευθύνσεις (κυρίως τή "διαμήκη" καί τήν "ἐγκάρσια"). Προκύπτουν, ἔτσι, οἱ δυνατές μορφές διάδοσης τοῦ κύματος ("τακτική" καί "ἔκτακτη" ἀκτίνα). Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ὅλη διαπραγμάτευση ἔχει ἄμεση ἐφαρμογή στή συμπεριφορά τῆς ἰονόσφαιρας κατά τήν πρόσπτωση ΗΜ κύματος, ἀλλά καί μεγάλο ἐνδιαφέρον γιά τή μελέτη τῆς στροφῆς τοῦ ἐπιπέδου πόλωσης τοῦ κύματος πού περνᾶ μέσα ἀπ' αὐτήν, φαινομένου γνωστοῦ σάν στροφή Faraday. Ἡ μελέτη ἀκριβῶς τῆς στροφῆς Faraday γίνεται, σέ ἀρκετή ἔκταση, στό τέλος τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ.

Τό 7ο, τελευταῖο κεφάλαιο, εἶναι ἀφιερωμένο στή μελέτη τῆς πόλωσης τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος, ὅπου χρησιμοποιήσαμε βασικά τήν πολύ εὔληπτη μεθοδολογία πού ἀκολουθεῖ ὁ Kraus. Ἀφοῦ εἰσαχθεῖ ἡ ἔννοια τῆς πόλωσης καί ὁριστοῦν οἱ "γεωμετρικές" της παράμετροι, γίνεται μιά ἀρχική μελέτη τῆς "ὁλικῆς" ἐλλειπτικῆς πόλωσης, θεωρημένης σάν ἐπαλληλίας εἴτε δύο γραμμικά πολωμένων κυμάτων εἴτε δύο κυκλικά πολωμένων κυμάτων.

Δείχνεται ὅτι ἀρκεῖ ἕνα σημεῖο ἐπάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς "σφαίρας τοῦ Poincaré" γιά νά περιγραφεῖ τέλεια τό εἶδος τῆς ὁλικῆς πόλωσης, σ' ὁποιαδήποτε περίπτωση.

Ἐξετάζεται ὕστερα τό "μερικά πολωμένο κύμα" καί ὁρίζονται οἱ τέσσερις παράμετροι τοῦ Stokes ἤ ὅπως λέμε, τό διάνυσμα Stokes $\vec{S}$, πού καθορίζει μονοσήμαντα τό πολωμένο κύμα. Τονίζεται ἰδιαίτερα ἡ σημαντική "γραμμική" ἰδιότητα, σύμφωνα μέ τήν ὁποία ὅταν ἔχουμε ἐπαλληλία πολλῶν, ἀνεξάρτητων μεταξύ τους, πολωμένων κυμάτων, τό τελικό κύμα πού προκύπτει, ἔχει διάνυσμα Stokes ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων Stokes τῶν ἐπιμέρους κυμάτων.

Στή συνέχεια, γίνεται ἡ περιγραφή τῶν χαρακτηριστικῶν πόλωσης

μιᾶς κεραίας, μέ τή βοήθεια ἑνός διανύσματος (ἤ μήτρας-στήλης) ἀνάλογου μέ τό διάνυσμα $\vec{S}$, καί δείχνεται ὅτι ἡ ἰσχύς πού παίρνει τελικά μιά κεραία λήψης, ἀπό ἕνα πολωμένο κύμα, εἶναι τό ἐσωτερικό γινόμενο τῶν παραστατικῶν διανυσμάτων τῆς κεραίας καί τοῦ κύματος. Προκύπτουν ἔτσι ἄμεσα οἱ συνθῆκες προσαρμογῆς (ἤ ἄριστης σύζευξης) μεταξύ κεραίας καί κύματος.

Στό τέλος τοῦ κεφαλαίου γίνεται γενίκευση πρός τήν ὀπτική μέ τόν ὁρισμό (ἀπό τίς παραμέτρους Stokes) τῆς "μήτρας συνεκτικότητας" (coherency matrix) καί τό κεφάλαιο κλείνει μέ τή μελέτη τοῦ μετασχηματισμοῦ, πού θά ὑποστεῖ τό διάνυσμα $\vec{S}$ ἑνός κύματος, κατά τή διέλευσή του μέσα ἀπό ἕνα "γραμμικό ὑλικό (ἤ διάταξη), τοῦ ὁποίου ἡ "συνάρτηση μεταφορᾶς" δίνεται ἀπό μιά "μήτρα Mueller".

Μετά τό θεωρητικό μέρος, ἔχουν παρατεθεῖ 108 προβλήματα, σέ σειρά πού ἀντιστοιχεῖ στά ἑπτά θεωρητικά κεφάλαια. Τά προβλήματα διαλέχτηκαν ἔτσι, ὥστε ὄχι μόνο νά βοηθήσουν τόν ἀναγνώστη νά πάρει μιά καλή γεύση ἐφαρμογῶν, ἀλλά καί νά ἐμπεδώσουν τό θεωρητικό μέρος, καί νά τό συμπληρώσουν σέ πολλά σημεῖα. Τά προβλήματα εἶναι εἴτε τελείως λυμένα εἴτε συνοδεύονται ἀπό τίς ἀπαντήσεις τους.

Δυό λόγια γιά τίς Μονάδες: Τόσο στή θεωρία ὅσο καί στά προβλήματα, ἀκολουθήσαμε τό Διεθνές Σύστημα Μονάδων SI (Système International), στό ὁποῖο ἄλλωστε τείνει νά συμμορφωθεῖ, σέ διεθνή κλίμακα, κάθε νέα ἐπιστημονική ἔκδοση.

Ὁ πρῶτος ἀπό μᾶς θά ἤθελε νά εὐχαριστήσει θερμά τό Ραδιοηλεκτρολόγο Φυσικό Σωτήρη Καρρᾶ γιά τήν πρακτική δουλειά πού ἔκανε σάν σπουδαστής τοῦ Μεταπτυχιακοῦ Ἐνδεικτικοῦ, καθαρογράφοντας τίς σημειώσεις σέ μιά πρώτη φάση.

ΑΘΗΝΑ , Ἀπρίλης 1979

Κ.ΚΑΡΟΥΜΠΑΛΟΣ Κ.ΒΑΛΕΟΝΤΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ.

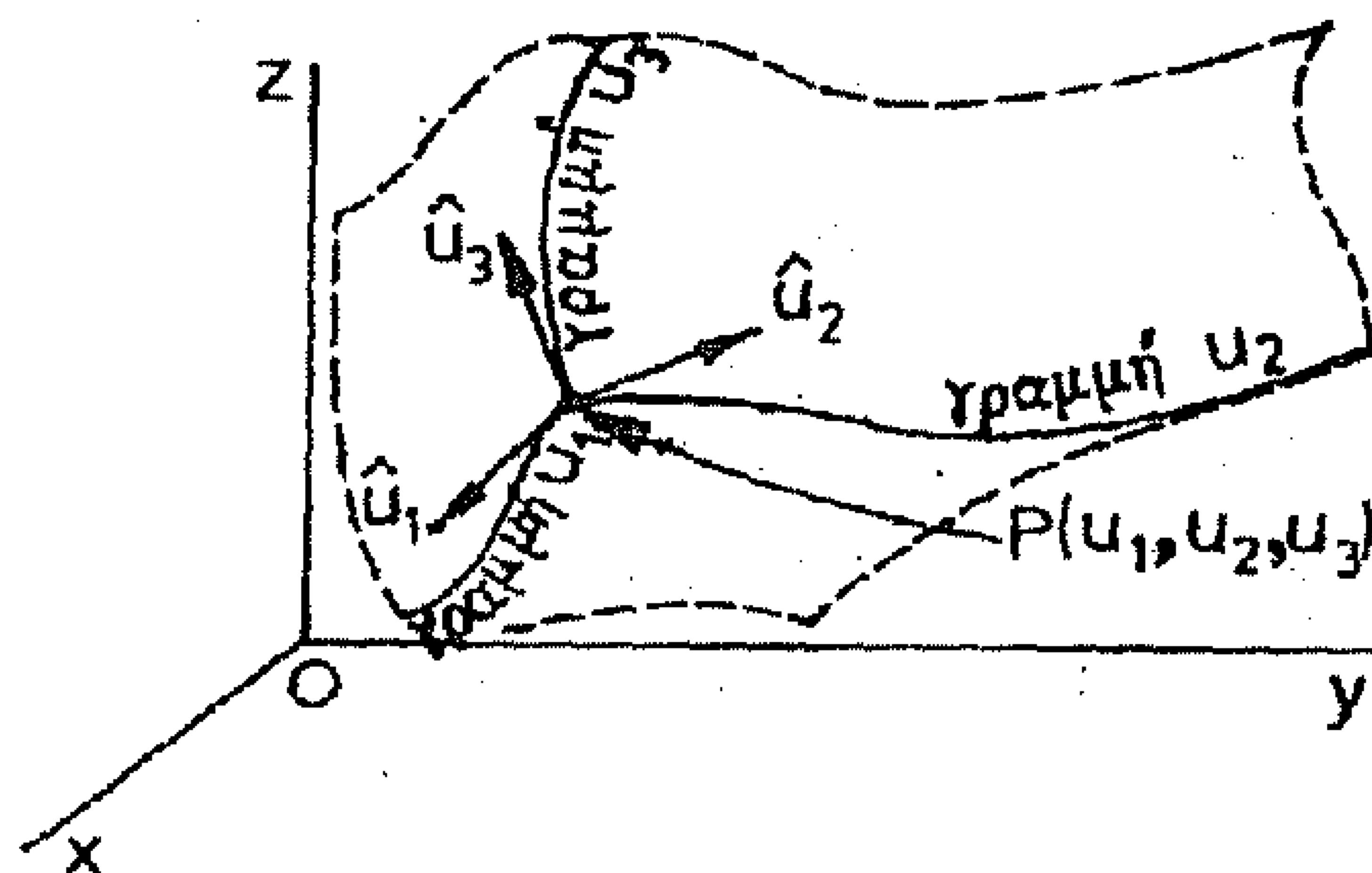
1.1. Ὀρθογώνια Συστήματα Συντεταγμένων.

Κάθε σημεῖο P μπορεῖ νά όριστεῖ ἀπό τήν τομή τριῶν ἐπιφανειῶν:

$f_1(x,y,z) = u_1$ = σταθερά

$f_2(x,y,z) = u_2$ = σταθερά

$f_3(x,y,z) = u_3$ = σταθερά



Σχ. 1-1. Σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων

Οἱ ἐπιφάνειες αὐτές ὀνομάζονται σ υ ν τ ε τ α γ μ έ ν ε ς ἐ π ι φ ά ν ε ι ε ς καί οἱ τομές τους ἀνά δύο σ υ ν τ ε τ α γ μ έ ν ε ς γ ρ α μ μ έ ς. Ἄν μάλιστα οἱ γραμμές αὐτές τέμνονται κάθετα τό σύστημα λέγεται ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο .

Ἄν $\vec{r}$ εἶναι τό διάνυσμα θέσης ἑνός σημείου $P = P(u_1, u_2, u_3)$ τότε τό διάνυσμα $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ ἐφάπτεται στή συντεταγμένη γραμμή u_i στό σημεῖο P καί δίνεται ἀπό τή σχέση :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \hat{u}_i \qquad \text{γιά } i=1,2,3 \qquad (1\text{-}1)$$

ὅπου $\hat{u}_i$ τό μ ο ν α δ ι α ῖ ο δ ι ά ν υ σ μ α πάνω στή γραμμή u_i πού δίνεται ἀπό τή σχέση :

$$\hat{u}_i = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right|} \qquad (1\text{-}2)$$

καί h_i οί σ υ ν τ ε λ ε σ τ έ ς κ λ ί μ α κ α ς έτσι πού :

$$h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2} \qquad (1\text{-}3)$$

Παρατήρηση:

Τά μοναδιαΐα διανύσματα $\hat{u}_i$ άλλάζουν γενικά διεύθυνση άπό σημεΐο σέ σημεΐο. Μόνο στό καρτεσιανό όρθογώνιο σύστημα $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ έχουν σταθερή κατεύθυνση σέ κάθε σημεΐο τοῦ χώρου.

Γιά τό όρθογώνιο καρτεσιανό σύστημα

Οί συντεταγμένες έπιφάνειες πού όρίζουν τό σημεΐο P(x,y,z) εΐναι τά έπίπεδα

x = σταθ.

y = σταθ.

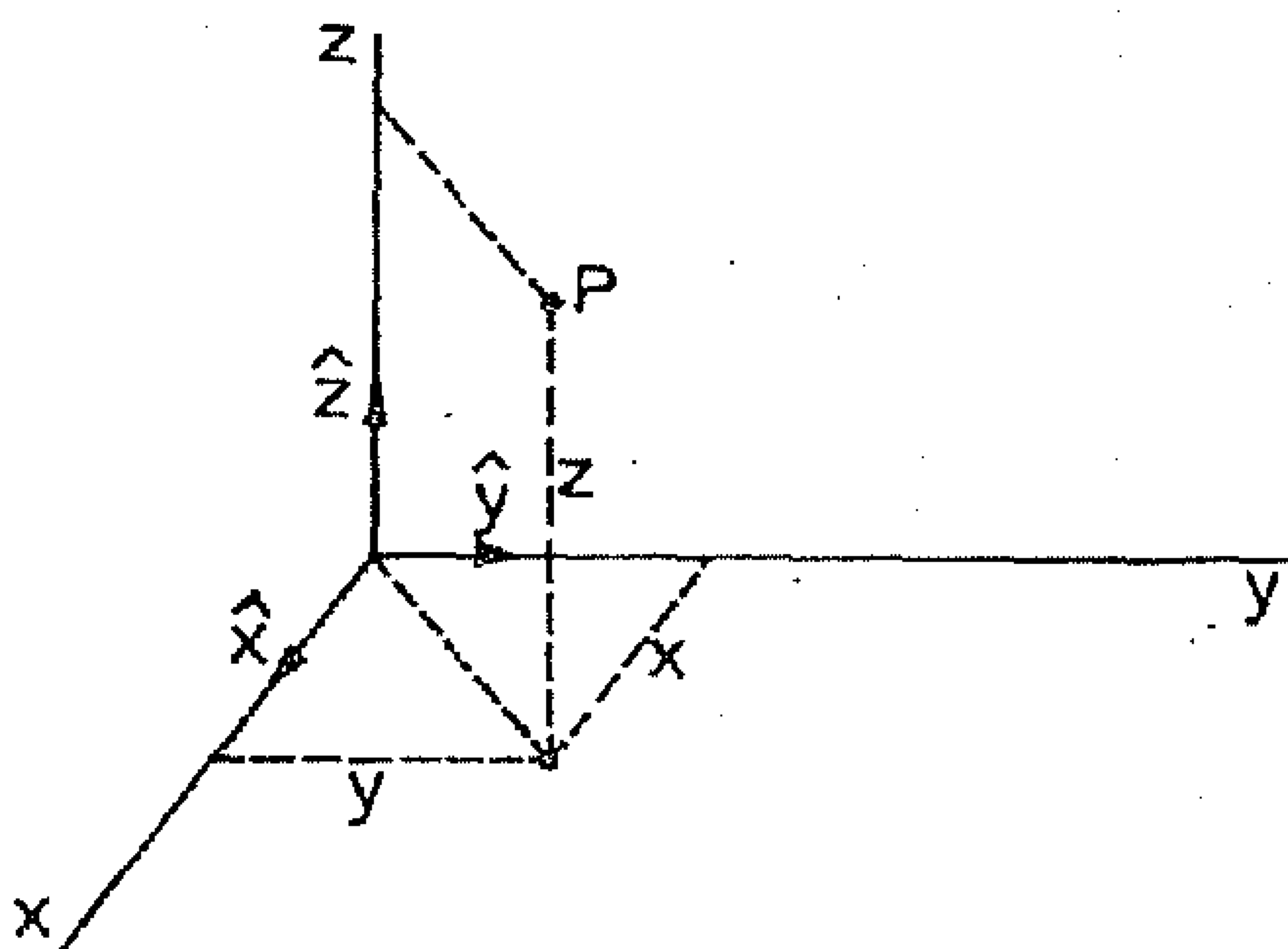
z = σταθ.

Μοναδιαΐα διανύσματα εΐναι τά:

$$\hat{u}_1 = \hat{x} \; , \; \hat{u}_2 = \hat{y} \; , \; \hat{u}_3 = \hat{z}$$

μέ συντελεστές κλίμακας

$$h_x = h_y = h_z = 1$$



Σχ. 1-2. Όρθογώνιο καρτεσιανό σύστημα

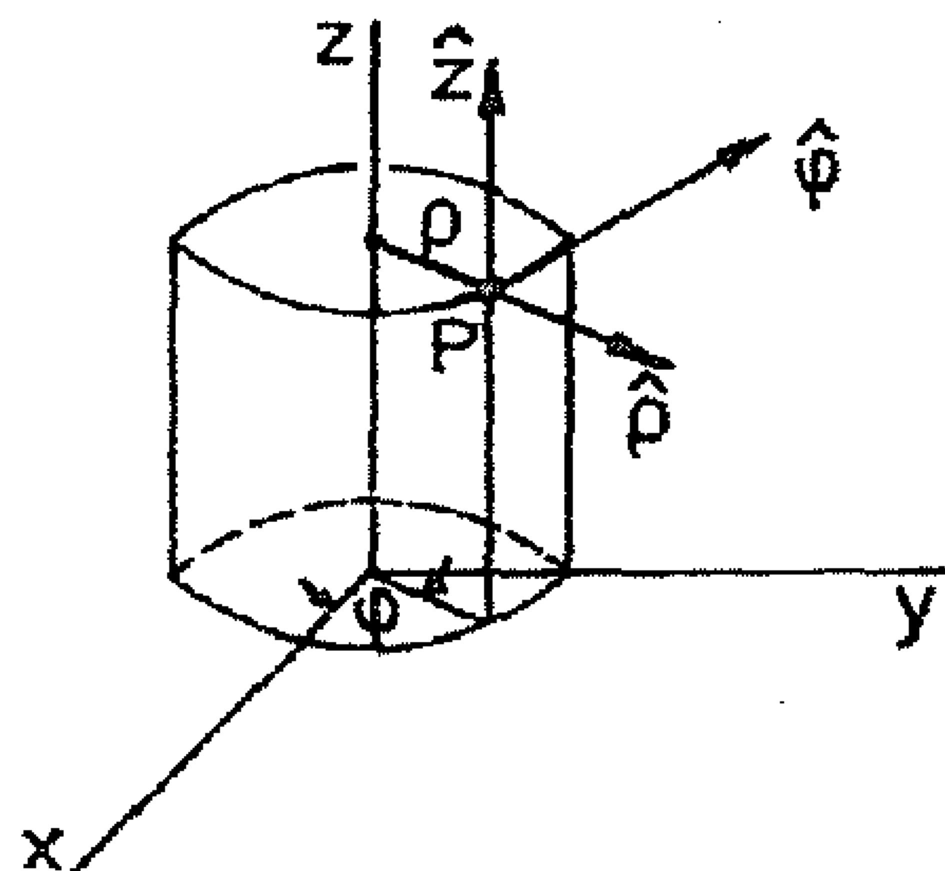
Γιά τό κυλινδρικό σύστημα

Οί συντεταγμένες έπιφάνειες πού όρίζουν τό σημεΐο P(ρ,φ,z) εΐναι :

(i) Ένας ὀρθός κυκλικός κύλινδρος μέ ἀκτίνα $\rho = c_1$ καί ἄξονα τόν z.

(ii) Ένα ἐπίπεδο $\varphi = c_2$ πού περνᾶ ἀπό τόν ἄξονα τῶν z.

(iii) Ένα ἐπίπεδο $z = c_3$ κάθετο στόν ἄξονα τῶν z. Οἱ συντελεστές κλίμακας εἶναι: $h_\rho = 1 \quad h_\varphi = \rho \quad h_z = 1$



Σχ. 1-3. Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Γιά τό σφαιρικό σύστημα

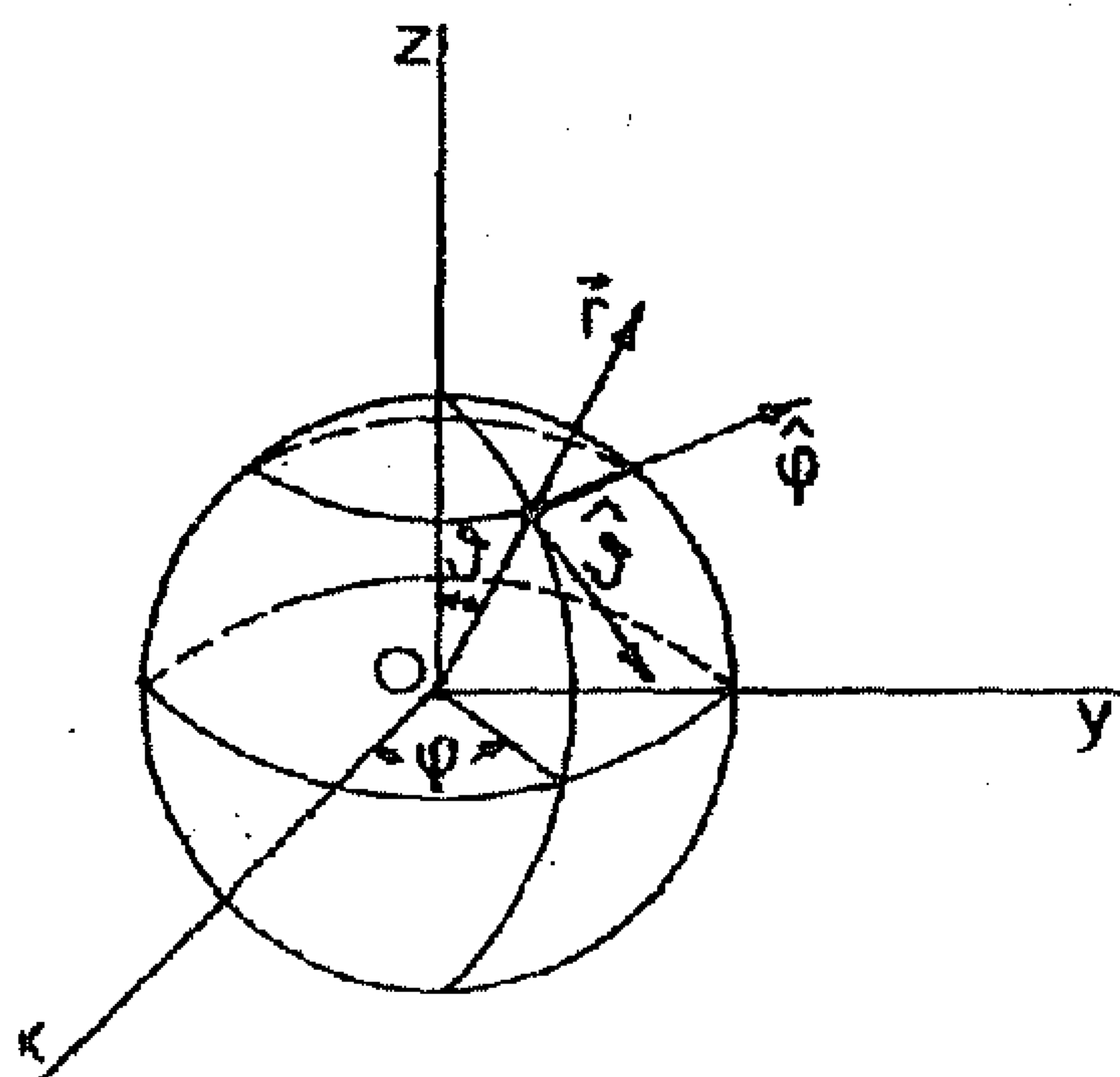
Οἱ συντεταγμένες ἐπιφάνειες πού ὁρίζουν τό σημεῖο $P(r,\vartheta,\varphi)$ εἶναι :

(i) $r = c_1$ σφαίρα μέ κέντρο τήν ἀρχή 0 .

(ii) $\vartheta = c_2$ κῶνος μέ κορυφή τό 0 .

(iii) $\varphi = c_3$ ἐπίπεδο πού περνᾶ ἀπό τόν ἄξονα z .

Οἱ συντελεστές κλίμακας εἶναι : $h_r = 1$, $h_\vartheta = r$, $h_\varphi = r \sin\vartheta$.



Σχ. 1-4. Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Έκφραση τῶν στοιχείων μήκους, ἐπιφάνειας καί ὄγκου

Άν ἡ συντεταγμένη u_i μεταβληθεῖ κατά τή διεύθυνση $\hat{u}_i$ κατά

du_i , τό μέτρο τῆς ἀντίστοιχης μετατόπισης dl_i πάνω στή συντεταγμένη γραμμή u_i εἶναι :

$$dl_i = h_i\, du_i \qquad i = 1,2,3 \tag{1-4}$$

καί τό στοιχεῖο μήκους dl γιά ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα :

$$dl^2 = dl_1^2 + dl_2^2 + dl_3^2 \tag{1-5}$$

Οἱ προβολές τοῦ στοιχείου ἐπιφάνειας dS πάνω στίς συντεταγμένες ἐπιφάνειες εἶναι:

$$\begin{aligned} dS_1 &= dl_2\, dl_3 = h_2 h_3\, du_2\, du_3 \\ dS_2 &= dl_3\, dl_1 = h_3 h_1\, du_3\, du_1 \\ dS_3 &= dl_1\, dl_2 = h_1 h_2\, du_1\, du_2 \end{aligned} \tag{1-6}$$

καί τό στοιχεῖο ὄγκου dV δίνεται ἀπό τήν σχέση :

$$dV = dl_1\, dl_2\, dl_3 = h_1 h_2 h_3\, du_1\, du_2\, du_3 \tag{1-7}$$

1.2. Οἱ Διανυσματικοί Τελεστές.

Ἔστω $U(\vec{r})$ καί $\vec{F}(\vec{r})$ μιά μονόμετρη καί μιά διανυσματική συνάρτηση τῆς θέσης $\vec{r}$ τοῦ σημείου P , ΔΨ ἡ ροή τῆς $\vec{F}$ ἀπό ἕναν ὄγκο ΔV γύρω ἀπό τό σημεῖο P, πού περιορίζεται ἀπό τήν κλειστή ἐπιφάνεια ΔS.

Ἡ β α θ μ ί δ α τοῦ μονόμετρου πεδίου U(gradient) ὁρίζεται ἀπό τή σχέση :

$$\text{grad}U = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} U\, d\vec{S} \tag{1-8}$$

καί κάνει διανυσματοποίηση τοῦ μονόμετρου μεγέθους U . Ὅπως ἀποδείχνεται παρακάτω (παρ.1.5.1) τό διάνυσμα gradU βλέπει πρός τά ἐκεῖ πού τό πεδίο U μεταβάλλεται γρηγορότερα.

Ἡ ἀ π ό κ λ ι σ η (divergence) τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου $\vec{F}$ ὁρίζεται μέ τό ὅριο:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{F}.d\vec{S} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta V} = \frac{d\Psi}{dV} \qquad (1\text{-}9)$$

καί παριστάνει τή ροή τοῦ πεδίου μέσα ἀπό τήν ἐπιφάνεια πού περικλείει τή μονάδα ὄγκου.

Ὁ σ τ ρ ο β ι λ ι σ μ ό ς (curl,rotation) τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου $\vec{F}$ ὁρίζεται ἀπό τή σχέση :

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} d\vec{S} \times \vec{F} \qquad (1\text{-}10)$$

καί παριστάνει τήν " κυκλοφορία " τοῦ πεδίου ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας.

Π α ρ α τ η ρ ο ῦ μ ε ὅτι οἱ πιό πάνω ὁρισμοί ἑνοποιοῦνται μέ τή βοήθεια τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τελεστῆ

$$\vec{\nabla} o \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} d\vec{S} o \qquad (1\text{-}11)$$

ὅπου τό o παριστάνει (i) ἐσωτερικό (ii) ἐξωτερικό ἤ (iii) κοινό γινόμενο.

Πιό κάτω δίνουμε τίς ἀναλυτικές ἐκφράσεις τῶν grad, div καί rot σέ ἕνα γενικευμένο σύστημα ὀρθογώνιων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων :

$$\vec{\nabla} U \equiv \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial l_1}\hat{u}_1 + \frac{\partial U}{\partial l_2}\hat{u}_2 + \frac{\partial U}{\partial l_3}\hat{u}_3 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u_1}\hat{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial u_2}\hat{u}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial U}{\partial u_3}\hat{u}_3 \qquad (1\text{-}12)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(F_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(F_3 h_1 h_2) \right\} \qquad (1\text{-}13)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \mathrm{rot}\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\cdot\begin{vmatrix} h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{u}_2 & h_3\hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix} \qquad (1\text{-}14)$$

Σημειώνουμε ὅτι ὁ ὁλοκληρωτικός τελεστής $\vec{\nabla}$ μόνο στό ὀρθογώνιο καρτεσιανό σύστημα ἔχει ἀναλυτική διαφορική ἔκφραση, τέτοια πού ἄν ἐφαρμοστεῖ στίς πράξεις $\vec{\nabla}U$, $\vec{\nabla}.\vec{F}$ καί $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ νά μᾶς δώσει τίς ἀντίστοιχες ἀναλυτικές ἐκφράσεις τῶν gradU, div$\vec{F}$ καί rot$\vec{F}$.

Γιαυτό στή πράξη τά ∇U, $\vec{\nabla}.\vec{F}$, $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ χρησιμοποιοῦνται σάν συμβολισμοί ἰσοδύναμοι μέ τούς gradU, div$\vec{F}$, rot$\vec{F}$ καί μόνο στό ὀρθογώνιο καρτεσιανό σύστημα ἔχουν τήν ἔννοια πράξεων (βλ. καί παρ.1.4 παρακάτω)

Σάν Λαπλασιανή (Laplacien) ἑνός μονόμετρου πεδίου U ὁρίζουμε τό μονόμετρο μέγεθος div gradU καί τό συμβολίζουμε μέ $\nabla^2 U$. Σέ ἕνα ὀρθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ἡ Λαπλασιανή τοῦ U δίνεται ἀπό τήν ἔκφραση :

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial u_3}\right)\right\} \qquad (1\text{-}15)$$

'Ανάλογα ὁρίζεται καί ἡ Λαπλασιανή ἑνός διανυσματικοῦ πεδίου $\vec{F}$.

'Η Λαπλασιανή ἑνός διανυσματικοῦ πεδίου $\vec{F}(\vec{r})$ στό καρτεσιανό σύστημα ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση:

$$\nabla^2\vec{F} = \hat{x}\nabla^2 F_x + \hat{y}\nabla^2 F_y + \hat{z}\nabla^2 F_z \qquad (1\text{-}16)$$

ἐνῶ στά ὑπόλοιπα ὀρθογώνια συστήματα συντεταγμένων ἀπό τή σχέση

$$\nabla^2\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F} \qquad (1\text{-}17)$$

ἤ τήν ἰσοδύναμή της :

$$\nabla^2\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\vec{F}}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\vec{F}}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\vec{F}}{\partial u_3}\right)\right] \qquad (1\text{-}18)$$

1.3. Θεωρήματα Gauss καί Stokes.

Άν $\vec{A}(\vec{r})$ εἶναι ἕνα διανυσματικό πεδίο ἀποδεικνύονται τά παρακάτω βασικά θεωρήματα:

(α) $$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s}$$ θεώρημα Gauss (1-19)

μέ τή βοήθεια τοῦ ὁποίου μποροῦμε νά μετατρέψουμε τριπλό ὁλοκλήρωμα (ὄγκου V) σέ διπλό (ἐπιφανειακό πάνω στή κλειστή ἐπιφάνεια S πού περιβάλλει τόν προηγούμενο ὄγκο V).

(β) $$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$$ θεώρημα Stokes (1-20)

μέ τή βοήθεια τοῦ ὁποίου ἕνα ἐπιφανειακό ὁλοκλήρωμα πάνω σέ μιά ἐπιφάνεια S μετατρέπεται σέ ἐπικαμπύλιο πάνω στή κλειστή καμπύλη C πού περιορίζει τήν ἐπιφάνεια.

1.4. Ὁ Διανυσματικός Τελεστής "Ἀνάδελτα" (Δεσμευμένος στό Καρτεσιανό Σύστημα).

Στό ὀρθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, οἱ ἐκφράσεις τῶν gradU, div$\vec{A}$ καί rot$\vec{A}$ ἔχουν τή μορφή :

$$\text{grad}\,U = \hat{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z} \quad (1\text{-}21)$$

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1\text{-}22)$$

$$\text{rot}\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z} \qquad (1\text{-}23)$$

Στίς (1-22) καί (1-23) μποροῦμε νά δώσουμε καί τή μορφή :

$$\text{div}\vec{A}=\hat{x}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}+\hat{y}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}+\hat{z}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial z} \qquad (1\text{-}24)$$

$$\text{rot}\vec{A}=\hat{x}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}+\hat{y}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}+\hat{z}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial z} \qquad (1\text{-}25)$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἄν χρησιμοποιήσουμε τό διαφορικό τελεστή ά ν ά-δ ε λ τ α (τελεστή τοῦ Hamilton, del ἤ nabla) $\vec{\nabla}$, πού ἔχει τήν καρτεσιανή μορφή :

$$\vec{\nabla}=\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (1\text{-}26)$$

οἱ σχέσεις (1-21), (1-24) καί (1-25) παίρνουν τή μορφή :

$$\text{gradU}=\vec{\nabla}U \qquad (1\text{-}27)$$

$$\text{div}\,\vec{A}=\vec{\nabla}.\vec{A} \qquad (1\text{-}28)$$

$$\text{rot}\,\vec{A}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad (1\text{-}29)$$

'Ο τελεστής " ἀνάδελτα " εἶναι ἡ διαφορική ἔκφραση, στό καρτεσιανό σύστημα , τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τελεστῆ $\vec{\nabla}$ πού προαναφέραμε , καί πού στά ἄλλα συστήματα συντεταγμένων, ἐκτός ἀπό τό καρτεσιανό , δέν ἔχει ἀντίστοιχη διαφορική ἔκφραση .

'Αξίζει νά ἀναφέρουμε ὅτι ὁ τελεστής ἀνάδελτα μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ καί σέ ἄλλους παραστατικούς χώρους , ὅπως στό χῶρο τῶν ταχυτήτων, τῶν ὁρμῶν κ.τ.λ. Π.χ. στό χῶρο τῶν ταχυτήτων ἔχουμε ὅτι:

$$\vec{\nabla}_{\upsilon}=\hat{x}\frac{\partial}{\partial \upsilon_x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial \upsilon_y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial \upsilon_z} \qquad (1\text{-}30)$$

Μποροῦμε ἐπίσης νά ὁρίσουμε ἀνάλογους διαφορικούς τελεστές καί σέ χώρους περισσότερων διαστάσεων. Στόν τετραδιάστατο π.χ. χῶρο (x.y.z.w) ὁρίζουμε τόν

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{w}\frac{\partial}{\partial w} \qquad (1\text{-}31)$$

καί σέ ἕνα χῶρο r διαστάσεων

$$\vec{\nabla} = \sum_{i}^{r} \hat{u}_i \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, r. \qquad (1\text{-}32)$$

Στό ὀρθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα ἡ Λαπλασιανή τοῦ πεδίου U εἶναι:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (1\text{-}33)$$

'Από τήν ἔκφραση αὐτή εἶναι φανερό ὅτι ἡ Λαπλασιανή μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ἐφαρμογή τοῦ μονόμετρου τελεστῆ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1\text{-}34)$$

πού μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν τό " ἐσωτερικό τετράγωνο " τοῦ τελεστῆ ἀνάδελτα $\vec{\nabla}$:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \qquad (1\text{-}35)$$

1.5. Φυσική σημασία τῶν grad, div, rot καί ∇^2

1.5.1. Βαθμίδα (grad).

"Εστω τό μονόμετρο πεδίο $\Phi(\vec{r})$ καί μιά αὐθαίρετη διεύθυνση $\hat{n}$ 'Η κατευθυνόμενη παράγωγος τοῦ Φ κατά τή διεύθυνση $\hat{n}$ εἶναι:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot$$

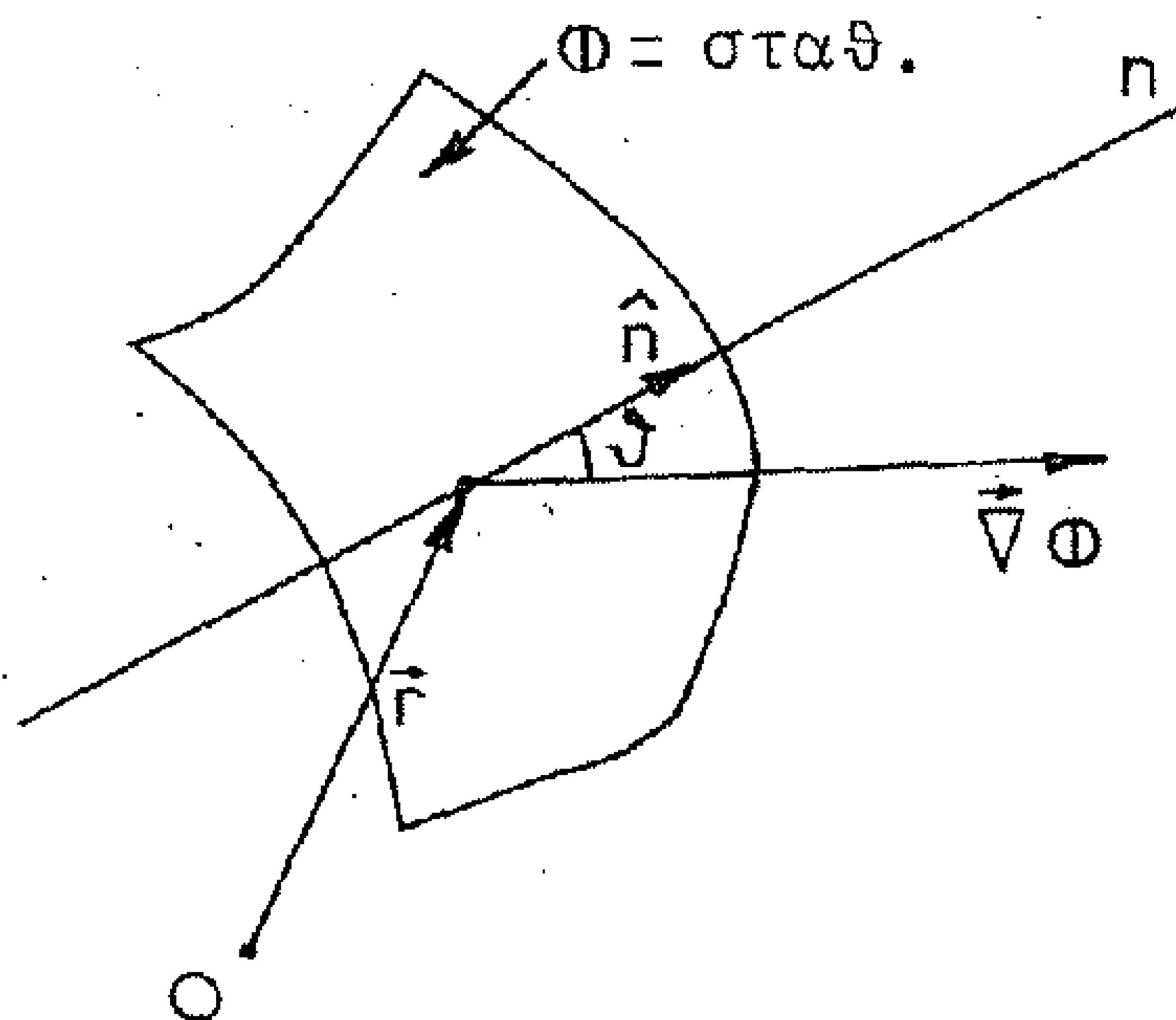
$$\cdot \left(\frac{\partial x}{\partial n}\hat{x} + \frac{\partial y}{\partial n}\hat{y} + \frac{\partial z}{\partial n}\hat{z}\right) = \vec{\nabla}\Phi \cdot \hat{n} \qquad (1\text{-}36)$$

Ὥστε :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{\nabla}\Phi \cdot \hat{n} = |\vec{\nabla}\Phi| \cos\vartheta \qquad (1\text{-}37)$$

(βλ. σχ. 1-5)

Ὥστε ἡ κατευθυνόμενη παράγωγος τοῦ πεδίου Φ στή θέση $\vec{r}$ καί κατά τή διεύθυνση $\hat{n}$ εἶναι ἴση μέ τήν προβολή τῆς βαθμίδας $\vec{\nabla}\Phi$ στό σημεῖο $\vec{r}$ πάνω στή διεύθυνση $\hat{n}$. Παρατηροῦμε ὅτι ἄν ἀλλάζουμε διευθύνσεις $\hat{n}$ ἡ $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ γίνεται μέγιστη ὅταν $\hat{n} // \vec{\nabla}\Phi$



Σχ. 1-5. Ἡ βαθμίδα ∇Φ εἶναι διάνυσμα κάθετο στήν ἐπιφάνεια Φ = σταθ.

καί $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{max} = |\vec{\nabla}\Phi|$ (1-38)

Ὥστε ἡ βαθμίδα τοῦ Φ ($\vec{\nabla}\Phi$) εἶναι ἕνα διάνυσμα πού ἔχει τή διεύθυνση καί φορά τοῦ μέγιστου ρυθμοῦ μεταβολῆς τοῦ πεδίου Φ καί μέτρο ἴσο ἀκριβῶς μέ τό μέγιστο αὐτό ρυθμό.

Ἄν ἀπό τή θέση $\vec{r}$ θεωρήσουμε μιά μετατόπιση $d\vec{r}$ τό μονόμετρο πεδίο $\Phi(\vec{r})$ θά γίνει $\Phi+d\Phi$. Ὅπως ξέρουμε τό ὁλικό διαφορικό $d\Phi$ δίνεται ἀπό τή σχέση

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz \qquad (1\text{-}39)$$

πού μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}) = \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} \qquad (1\text{-}40)$$

Ὥστε τό ὁλικό διαφορικό τοῦ πεδίου $\Phi(\vec{r})$ εἶναι ἴσο μέ τό ἐσωτερικό γινόμενο τῆς βαθμίδας του ἐπί τή μετατόπιση $d\vec{r}$

Ἡ ἐξίσωση $\Phi(\vec{r})$ = σταθ. εἶναι ἡ ἐξίσωση μιᾶς ἐπιφάνειας πάνω στήν ὁποία τό μονόμετρο πεδίο ἔχει σταθερή τιμή (π.χ μιά ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια). Πάνω στήν ἐπιφάνεια αὐτή εἶναι $d\Phi=0$ καί ἑπομένως :

$$\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = 0 \tag{1-41}$$

Ὥστε $\vec{\nabla}\Phi \perp d\vec{r}$ καί ἐπειδή τό $d\vec{r}$ ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτόμενης στήν ἐπιφάνεια προκύπτει, ὅτι ἡ βαθμίδα $\vec{\nabla}\Phi$ εἶναι κάθετη στήν ἐπιφάνεια $\Phi(\vec{r})$ = σταθ.

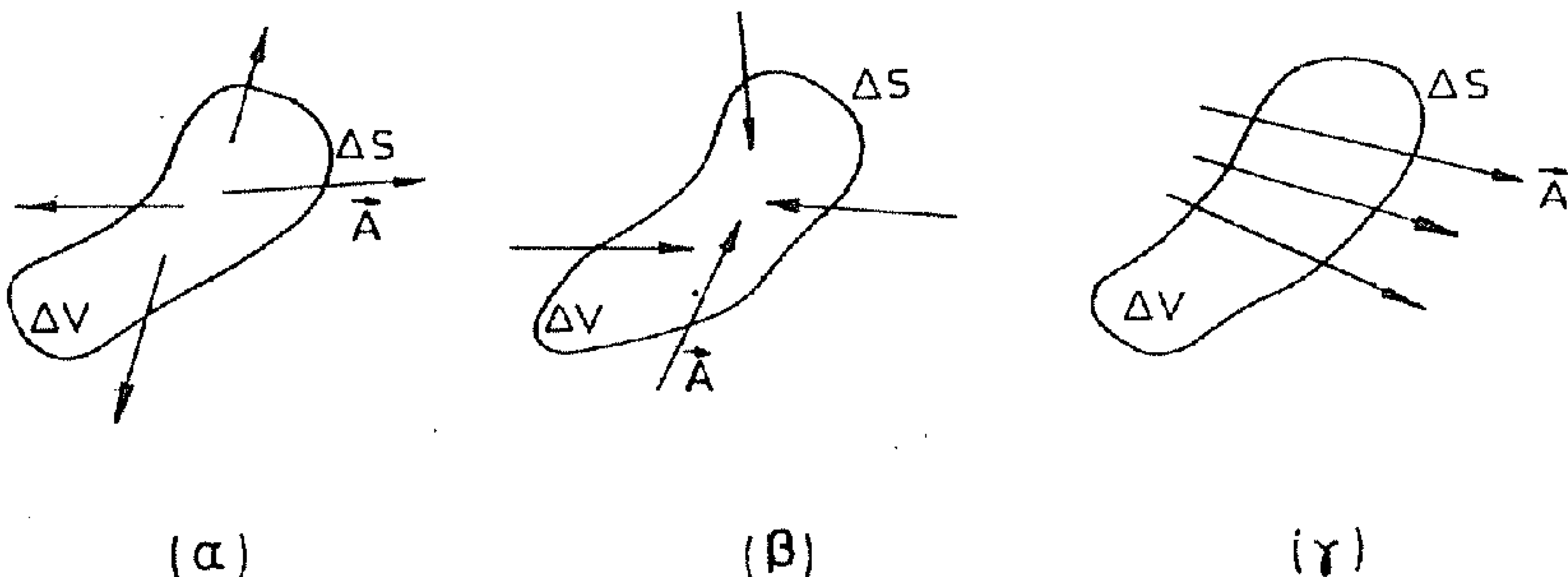
Καί ἑπομένως τό διάνυσμα

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} \tag{1-42}$$

εἶναι τό μοναδιαῖο διάνυσμα, πού εἶναι κάθετο στήν ἐπιφάνεια $\Phi(\vec{r})$ = σταθ.

1.5.2. Ἀπόκλιση (div).

Ἔστω ἕνα διανυσματικό πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$ καί μιά κλειστή ἐπιφάνεια ΔS, πού περικλείει ὄγκο ΔV γύρω ἀπό τό σημεῖο $\vec{r}$.
Στό σχ.1-6 φαίνονται οἱ τρεῖς περιπτώσεις, πού μπορεῖ νά συμβαίνουν στό σημεῖο $\vec{r}$.



Σχ. 1-6. Οἱ τρεῖς περιπτώσεις τῆς $\vec{\nabla}.\vec{A}$ στήν περιοχή ἑνός σημείου
(α) Παρουσία πηγῆς ($\vec{\nabla}.\vec{A} > 0$)
(β) Παρουσία καταβόθρας ($\vec{\nabla}.\vec{A} < 0$)
(γ) Περιοχή σωληνοειδοῦς πεδίου ($\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$)

Ἡ ἀπόκλιση τοῦ $\vec{A}$ εἶναι

$$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta V} = \frac{d\Psi}{dV} \qquad (1\text{-}43)$$

ἐκφράζει δηλ. τήν ἔνταση τῆς πηγῆς ἤ καταβόθρας τοῦ πεδίου (ροῆς τοῦ πεδίου) στή μονάδα τοῦ ὄγκου στή θέση $\vec{r}$.

Ἄς πάρουμε σάν συγκεκριμένο παράδειγμα τό πεδίο ταχυτήτων ἑνός πληθυσμοῦ σωματιδίων, πού ὑπακούουν στήν ἐξίσωση τῆς συνέχειας :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = C - \vec{\nabla}\cdot(N\vec{u}) \qquad (1\text{-}44)$$

(ρυθμός αὔξησης τῆς πυκνότητας τῶν σωματιδίων) = (ρυθμός δημιουργίας νέων σωματιδίων στή μονάδα τοῦ ὄγκου) − (ρυθμός ἐκροῆς τῶν σωματιδίων ἀπό τή μονάδα τοῦ ὄγκου)

Στή σχέση αὐτή ὁ ὅρος $\vec{\nabla}.(N\vec{u})$ ἐκφράζει τό ρυθμό ἐκροῆς τῶν σωματιδίων ἀπό τή μονάδα τοῦ ὄγκου. Ἄν δέν γίνεται συσσώρευση σωτιδίων τότε $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$ καί

$$\vec{\nabla} \,.\, (N\vec{u}) = C \qquad (1\text{-}45)$$

(ρυθμός ἐκροῆς σωματιδίων) = (ρυθμός δημιουργίας δηλ. ἔνταση τῆς πηγῆς παραγωγῆς σωματιδίων)

Ἄν στή περιοχή πού μελετᾶμε δέν ὑπάρχει πηγή δημιουργίας σωματιδίων (C = 0) τότε καί

$$\vec{\nabla} \,.\, (N\vec{u}) = 0 \qquad (1\text{-}46)$$

καί τό πεδίο $N\vec{u}$ εἶναι " σωληνοειδές " δηλ. δέν ἔχει οὔτε πηγή οὔτε καταβόθρα σωματιδίων. Ἡ σχέση αὐτή στή περίπτωση ροῆς ἀσυμ-

πίεστου ρευστοῦ (Ν = σταθ.) γίνεται

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0 \qquad (1\text{-}47)$$

1.5.3. Στροβιλισμός (rot).

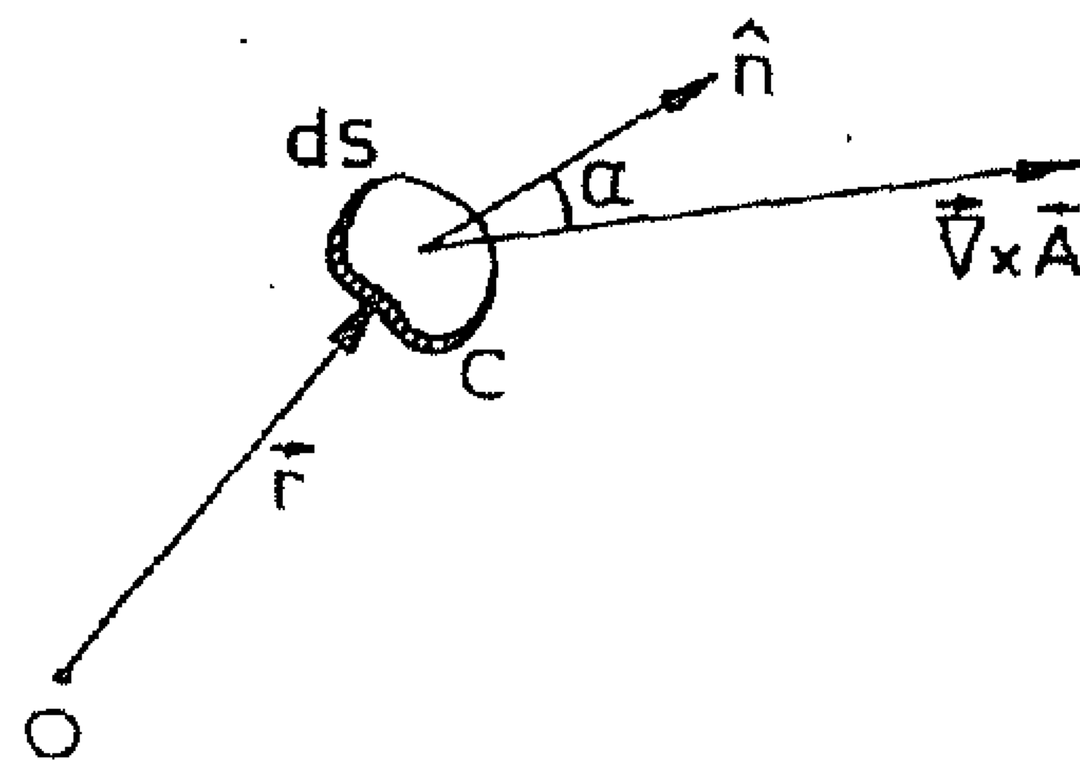
Ἔστω ἕνα διανυσματικό πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$ καί στή θέση $\vec{r}$ ἕνα στοιχεῖο ἐπιφάνειας $d\vec{S} = dS\hat{n}$ πού ἔχει περίγραμμα C.
Ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ Stokes ἔχουμε :

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,dS = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = d\Gamma \qquad (1\text{-}48)$$

ὅπου dΓ ἡ " κυκλοφορία " τοῦ $\vec{A}$ πάνω στό περίγραμμα C τοῦ dS.
Ὥστε :

$$|\vec{\nabla}\times\vec{A}|\cos\alpha = \frac{d\Gamma}{dS} \qquad (1\text{-}49)$$

Τό δεύτερο μέλος τῆς (1-49) εἶναι ἡ "κυκλοφορία" τοῦ πεδίου πάνω στό περίγραμμα C τῆς μονάδας τῆς ἐπιφάνειας, ἐνῶ τό πρῶτο μέλος εἶναι ἡ προβολή τοῦ rotA πάνω στή κάθετο $\hat{n}$ τῆς ἐπιφάνειας.



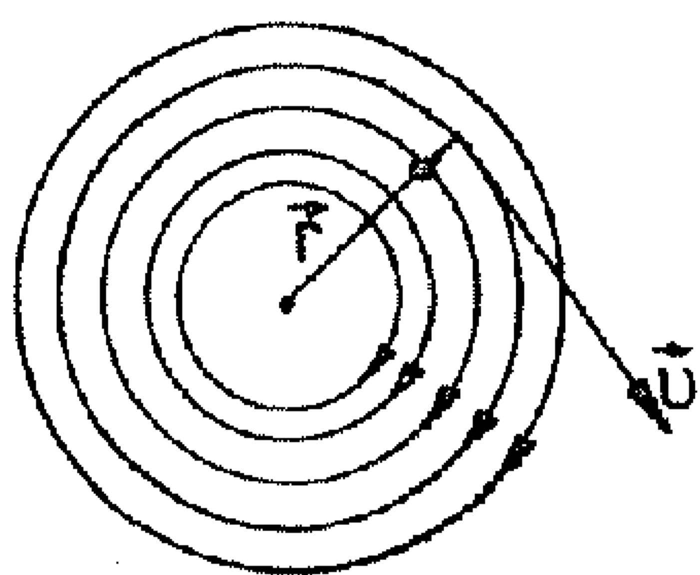
Σχ.1-7. Ἡ κυκλοφορία τοῦ $\vec{A}$ πάνω στό περίγραμμα C μιᾶς στοιχειώδους ἐπιφάνειας dS γίνεται μέγιστη ἄν ἡ dS προσανατολιστεῖ κάθετα στό $\vec{\nabla}\times\vec{A}$.

Ἄν θεωρήσουμε $\hat{n}$ παράλληλο μέ τό $rot\vec{A}$ τότε ἡ κυκλοφορία ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας γίνεται μέγιστη :

$$\left(\frac{d\Gamma}{dS}\right)_{max} = |\vec{\nabla}\times\vec{A}| \qquad (1\text{-}50)$$

Ὥστε ὁ στροβιλισμός τοῦ $\vec{A}$, σ' ἕνα σημεῖο $\vec{r}$, ἐκφράζει κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά, τή μέγιστη κυκλοφορία τοῦ πεδίου $\vec{A}$ ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας, στό σημεῖο αὐτό.

Ὅταν ἡ κυκλοφορία εἶναι μηδέν τότε μηδενίζεται καί ὁ στροβιλισμός τοῦ $\vec{A}$ καί τό πεδίο $\vec{A}$ σ' ἐκείνη τήν περιοχή τοῦ χώρου λέμε ὅτι εἶναι ἀ σ τ ρ ό β ι λ ο, ἐνῶ ἄν ἡ κυκλοφορία καί ἐπομένως ὁ στροβιλισμός τοῦ $\vec{A}$ δέν εἶναι μηδέν τότε τό πεδίο εἶναι στροβιλό.



Σχ. 1-8. Παράδειγμα ὑπολογισμοῦ rot$\vec{v}$ στήν περίπτωση ἑνός στροβίλου

Ἄς φανταστοῦμε γιά παράδειγμα ἕναν στρόβιλο ἑνός ρευστοῦ (σχ. 1-8) πού ἔχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega_x\hat{x} + \omega_y\hat{y} + \omega_z\hat{z}$.

Ἔστω $\vec{\upsilon}$ ἡ ταχύτητα ἑνός σημείου τοῦ στροβίλου. Εἶναι

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (1\text{-}51)$$

ὁπότε:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\upsilon} = \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{\nabla}\times\Big[(\omega_y z - \omega_z y)\hat{x} - (\omega_x z - \omega_z x)\hat{y} +$$

$$+(\omega_x y - \omega_y x)\hat{z}\Big] = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (\omega_y z - \omega_z y) & (\omega_z x - \omega_x z) & (\omega_x y - \omega_y x) \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}(\omega_x + \omega_x) + \hat{y}(\omega_y + \omega_y) + \hat{z}(\omega_z + \omega_z) = 2\vec{\omega}$$

Ὥστε:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\upsilon} = 2\vec{\omega} \qquad (1\text{-}52)$$

Από τή σχέση αὐτή δικαιολογεῖται καί ἡ ὀνομασία "στροβιλισμός".

1.5.4. Λαπλασιανή (∇^2)

Ἄς φανταστοῦμε ἕναν κύβο μέ πλευρά α σ' ἕνα σημεῖον O τοῦ χώρου καί ἄς πάρουμε τήν ἀρχή τοῦ ὀρθογώνιου καρτεσιανοῦ συστήματος στό σημεῖο αὐτό καί τούς ἄξονες x,y,z, παράλληλους ἀντίστοιχα πρός τίς ἀκμές τοῦ κύβου. Ἔστω Φ_o ἡ τιμή στή θέση O ἑνός μονόμετρου πεδίου $\Phi(\vec{r})$ καί $\bar{\Phi}$ ἡ μέση τιμή του μέσα στόν κύβο. Μπορεῖ νά ἀποδείξει κανένας ὅτι σέ πρώτη προσέγγιση

$$(\nabla^2 \Phi)_0 \simeq \frac{24}{\alpha^2} (\bar{\Phi} - \Phi_0) \qquad (1\text{-}53)$$

Δηλ. ἡ $\nabla^2\Phi$ σ' ἕνα σημεῖο, σέ πρώτη προσέγγιση, ἀποτελεῖ ἕνα μέτρο τοῦ πόσο διαφέρει ἡ τιμή Φ_o τοῦ πεδίου στή θέση O ἀπό τή μέση τιμή τοῦ Φ στή γειτονιά τοῦ σημείου O .

1.6. Μερικές Ἰδιότητες καί Σχόλια.

(α) Τό ἀνάδελτα ἑνός ἀθροίσματος συναρτήσεων θέσης εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀνάδελτα τῶν συναρτήσεων . Δηλαδή :

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}(\Phi_1 + \Phi_2) &= \vec{\nabla}\Phi_1 + \vec{\nabla}\Phi_2 \\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) &= \vec{\nabla}\cdot\vec{A}_1 + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}_2 \\ \vec{\nabla}\times(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) &= \vec{\nabla}\times\vec{A}_1 + \vec{\nabla}\times\vec{A}_2 \end{aligned}\right\} \text{ γραμμικότητα τοῦ τελεστῆ } \vec{\nabla} \qquad (1\text{-}54)$$

(β) Τό ἀνάδελτα τοῦ γινομένου δύο συναρτήσεων θέσης σέ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο $P = \Sigma$, εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀνάδελτα τῶν γινομένων πού λαβαίνουμε ἄν ὑποθέσουμε διαδοχικά σταθερή τή μιά καί τήν ἄλλη συνάρτηση, μέ τιμή τήν τιμή της στό σημεῖο Σ Δηλ.

$$\text{grad}\,(U_1\,U_2) = \vec{\nabla}(U_1 U_2) = \vec{\nabla}(\underline{U_1}\,U_2) + \vec{\nabla}(U_1\,\underline{U_2})$$

$$\text{grad}\,(\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2) = \vec{\nabla}(\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2) = \vec{\nabla}(\underline{\vec{A}_1}\cdot\vec{A}_2) + \vec{\nabla}(\vec{A}_1\cdot\underline{\vec{A}_2})$$

$$\text{div}\,(\vec{A}_1\times\vec{A}_2) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}_1\times\vec{A}_2) = \vec{\nabla}\cdot(\underline{\vec{A}_1}\times\vec{A}_2) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}_1\times\underline{\vec{A}_2}) \qquad (1\text{-}55)$$

$$\text{rot}\,(\vec{A}_1\times\vec{A}_2) = \vec{\nabla}\times(\vec{A}_1\times\vec{A}_2) = \vec{\nabla}\times(\underline{\vec{A}_1}\times\vec{A}_2) + \vec{\nabla}\times(\vec{A}_1\times\underline{\vec{A}_2})$$

$$\text{div}\,(\Phi\vec{A}) = \vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{A}) = \vec{\nabla}\cdot(\underline{\Phi}\vec{A}) + \vec{\nabla}\cdot(\Phi\underline{\vec{A}})$$

ὅπου ἔχουν ὑπογραμμιστεῖ οἱ ὅροι πού παίρνονται σταθεροί.

(γ)'Από τό τριπλό γινόμενο

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

προκύπτει:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$$

$$\text{div rot}\,\vec{A} = 0 \qquad (1\text{-}56)$$

(δ)'Από τήν σχέση $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$ προκύπτει:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \qquad (1\text{-}57)$$

$$\text{rot rot}\,\vec{A} = \text{grad div}\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A} \qquad (1\text{-}58)$$

(ε) Εὔκολα ἀποδείχνουμε διανυσματικά ὅτι :

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\,\Phi \equiv 0$$

δηλαδή ὅτι:

$$\text{rot grad}\,\Phi \equiv 0 \qquad (1\text{-}59)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-Ι

Ἔκφραση τῶν Διανυσματικῶν Τελεστῶν σέ Ὀρθογώνια Συστήματα Συντεταγμένων.

Ὀρθ. Καρτεσιανές	Κυλινδρικές Συντεταγμένες	Σφαιρικές Συντεταγμένες
Συνιστῶσες τῆς Βαθμίδας τοῦ ψ : $\vec{\nabla}\psi$		
$(\vec{\nabla}\psi)_x = \frac{\partial\psi}{\partial x}$ $(\vec{\nabla}\psi)_y = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ $(\vec{\nabla}\psi)_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$	$(\vec{\nabla}\psi)_\rho = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}$ $(\vec{\nabla}\psi)_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ $(\vec{\nabla}\psi)_z = \frac{\partial\psi}{\partial z}$	$(\vec{\nabla}\psi)_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}$ $(\vec{\nabla}\psi)_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}$ $(\vec{\nabla}\psi)_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$
Ἡ Ἀπόκλιση τοῦ $\vec{A}$: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$		
$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta A_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
Συνιστῶσες τοῦ Στροβιλισμοῦ τοῦ $\vec{A}$: $\vec{\nabla}\times\vec{A}$		
$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$ $(\vec{\nabla}\times\vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$ $(\vec{\nabla}\times\vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$	$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_\rho = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)$ $(\vec{\nabla}\times\vec{A})_\varphi = \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)$ $(\vec{\nabla}\times\vec{A})_z = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right\}$	$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_r = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial(\sin\vartheta A_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right\}$ $(\vec{\nabla}\times\vec{A})_\vartheta = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}$ $(\vec{\nabla}\times\vec{A})_\varphi = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right\}$
Ἡ Λαπλασιανή τοῦ ψ : div grad$\psi = \nabla^2\psi$		
$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-II

Κύριοι Τύποι τῆς Διανυσματικῆς Ἀνάλυσης

(1) $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = (\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = (\vec{B},\vec{C},\vec{A}) = (\vec{C},\vec{A},\vec{B}) =$

$= -(\vec{A},\vec{C},\vec{B}) = -(\vec{C},\vec{B},\vec{A}) = -(\vec{B},\vec{A},\vec{C}).$

(2) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

(3) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = \vec{A}\cdot\left[\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})\right] = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$

(4) $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{D})\vec{C} - (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{D}$

(5) $\mathrm{grad}(\varphi\psi) \equiv \vec{\nabla}(\varphi\psi) = \varphi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\varphi$

(6) $\mathrm{div}(\varphi\vec{A}) \equiv \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi + \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

(7) $\mathrm{rot}(\varphi\vec{A}) \equiv \vec{\nabla}\times(\varphi\vec{A}) = \varphi\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\times\vec{\nabla}\varphi$

(8) $\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B}) \equiv \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

(9) $\mathrm{rot}(\vec{A}\times\vec{B}) \equiv \vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) =$

$= \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

(10) $\mathrm{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \equiv \vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) =$

$= \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

(11) $\vec{\nabla}^2\varphi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi$

(12) $\vec{\nabla}^2\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

(13) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = \vec{0}$

(14) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$

(15) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$

(16) $\int_V (\varphi\vec{\nabla}^2\psi + \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi)\,dV = \oint_S \varphi\vec{\nabla}\psi\cdot d\vec{S}$

(17) $\int_V (\varphi\vec{\nabla}^2\psi - \psi\vec{\nabla}^2\varphi)\,dV = \oint_S (\varphi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\varphi)\cdot d\vec{S}$

(18) $\int_V \vec{\nabla}\varphi\,dV = \oint_S \varphi\,d\vec{S}$

Στούς δύο πίνακες 1-I καί 1-II συνοψίζουμε τίς εκφράσεις τῶν $\nabla\Psi$, $\vec{\nabla}.\vec{A}$, $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ καί $\nabla^2\Psi$ στό ὀρθογώνιο καρτεσιανό σύστημα, στό κυλινδρικό καί τό σφαιρικό, καθώς καί τούς κυριότερους τύπους τῆς διανυσματικῆς ἀνάλυσης.

1.7 Πότε Γνωρίζουμε Τελείως Ἕνα Πεδίο;

Θά ἔλεγε κανένας ὅτι ἡ γνώση τοῦ $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ ἀρκεῖ γιά νά προσδιορίσουμε τό πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$, γιατί ἡ διανυσματική διαφορική ἐξίσωση

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\alpha} \qquad (1\text{-}60)$$

ἀναλύεται σέ τρεῖς μονόμετρες διαφορικές ἐξισώσεις μέ τρεῖς ἀγνώστους (A_x , A_y, A_z) . Ἀπό τίς τρεῖς , ὅμως, αὐτές διαφορικές ἐξισώσεις οἱ δύο μόνο εἶναι ἀνεξάρτητες μεταξύ τους, γιατί ἰσχύει ἡ ταυτότητα :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}\equiv 0 \qquad (1\text{-}61)$$

Ἄν ὅμως ξέρουμε καί τό $\vec{\nabla}.\vec{A}=\beta$ τότε ἔχουμε ἀκόμα μιά διαφορική ἐξίσωση ἀνεξάρτητη ἀπό τίς ἄλλες.

Ὥστε ἔχοντας τό $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ καί τό $\vec{\nabla}.\vec{A}$ προσδιορίζουμε πλήρως τό πεδίο $\vec{A}$.

1.8. Χρονική Περιγραφή – Μιγαδικές Ἐκφράσεις τῶν Ἁρμονικῶν Πεδίων.

Στή γενική περίπτωση, ἕνα πεδίο - μονόμετρο Φ ἤ διανυσματικό $\vec{A}$ - εἶναι συνάρτηση καί τοῦ χρόνου t .
Εἶναι δηλαδή :

$$\begin{aligned}\Phi&=\Phi(\vec{r},t)\\ \vec{A}&=\vec{A}(\vec{r},t)\end{aligned} \qquad (1\text{-}62)$$

Δεδομένου ὅτι ἡ χρονική ἐξέλιξη τῶν πεδίων πού μᾶς ἐνδιαφέρουν εἶναι κυρίως ἁρμονική (ἡμιτονική ἤ συνημιτονική) θά ἀσχοληθοῦμε ἰδιαίτερα μέ τήν περίπτωση αὐτή.

Στή μελέτη τῶν ἁρμονικῶν πεδίων πολλά προσφέρει ὁ μιγαδικός λογισμός γιατί ἁπλοποιεῖ τίς πράξεις καί μετατρέπει τίς διαφορικές ἐξισώσεις σέ ἀλγεβρικές.

Ἔτσι, τά ἁρμονικά πεδία

$$\Phi(\vec{r},t) = \Phi_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(\vec{r}))$$
$$\vec{A}(\vec{r},t) = A_0(\vec{r})\hat{A} \cos(\omega t + \varphi(\vec{r})) \qquad (1\text{-}63)$$

μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὡς τά πραγματικά μέρη μιγαδικῶν πεδίων :

$$\Phi(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\Phi_0(\vec{r})\, e^{j(\omega t + \varphi(\vec{r}))}\right]$$
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[A_0(\vec{r})\hat{A}\, e^{j(\omega t + \varphi(\vec{r}))}\right] \qquad (1\text{-}64)$$

Ἄν γράφουμε τίς (1-64) μέ τή μορφή :

$$\Phi(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\Phi}(\vec{r})\, e^{j\omega t}\right]$$
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\vec{A}}(\vec{r})\, e^{j\omega t}\right] \qquad (1\text{-}65)$$

ὁρίζουμε τά λεγόμενα *φασικά πεδία* $\boldsymbol{\Phi}(\vec{r})$ καί $\boldsymbol{\vec{A}}(\vec{r})$ (phasors), πού ἀντιστοιχοῦν στά πραγματικά Φ καί $\vec{A}$.

Τά φασικά πεδία εἶναι μιγαδικά, ἔχουν. δηλ. μέτρο καί φάση καί εἶναι συναρτήσεις μόνο τῆς θέσης $\vec{r}$ καί ὄχι τοῦ χρόνου t .

Ἀπό τίς (1-64), (1-65) προκύπτουν οἱ σχέσεις :

$$\boldsymbol{\Phi}(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r})\, e^{j\varphi(\vec{r})}$$
$$\boldsymbol{\vec{A}}(\vec{r}) = A_0(\vec{r})\, e^{j\varphi(\vec{r})}\hat{A} \qquad (1\text{-}66)$$

Ἡ χρήση τῶν φασικῶν πεδίων εἶναι πολύτιμη στή λύση γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, ὥς πρός τό χρόνο γιατί μᾶς ἐπιτρέπει τίς τελεστικές ἀντιστοιχίες:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega \qquad (1\text{-}67)$$

$$\int \cdot dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \qquad (1\text{-}68)$$

Ἐφαρμόζοντας τίς ἀντιστοιχίες αὐτές στή γραμμική διαφορική ἐξίσωση καταλήγουμε σέ ἀλγεβρική ἐξίσωση μέ ἄγνωστο τό $\mathbb{\Phi}$ ἤ τό $\mathbb{\vec{A}}$ Καί τότε μέ τίς (1-65) προσδιορίζουμε τά πραγματικά ἁρμονικά πεδία .

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Τέτοιες ἀντιστοιχίες δέν πρέπει νά ἐφαρμόζονται σέ σχέσεις, πού δέν εἶναι γραμμικές . Π.χ. εἶναι :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \mathrm{Re}\left[\mathbb{\vec{A}} e^{j\omega t}\right]\cdot \mathrm{Re}\left[\mathbb{\vec{B}} e^{j\omega t}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbb{\vec{A}}\cdot\mathbb{\vec{B}}^{*} + \mathbb{\vec{A}}\cdot\mathbb{\vec{B}} e^{j2\omega t}\right]$$

δηλαδή $$\vec{A}\cdot\vec{B} \neq \mathrm{Re}\left[\mathbb{\vec{A}}\cdot\mathbb{\vec{B}} e^{j2\omega t}\right]$$

2. ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL

Σκοπός μας εἶναι νά συνδέσουμε τά πεδία μέ τίς πηγές τους μέσα σέ κάποιο ὑλικό μέσο.

2.1. Κλασικοί φυσικοί νόμοι πού ὁδήγησαν στίς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell.

2.1.1. Νόμος τοῦ Ampere.

Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Ampere τό κλειστό ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα τῆς μαγνητικῆς διέγερσης*) $\vec{H}$ πάνω σέ μιά κλειστή καμπύλη C εἶναι ἴσο μέ τήν ἔνταση I τοῦ ρεύματος, πού περικλείνει ἡ καμπύλη C :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \tag{2-1}$$

2.1.2. Νόμος τοῦ Faraday.

Ὁ νόμος τοῦ Faraday διατυπώνεται μέ τή σχέση :

$$U_{\varepsilon\pi} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{2-2}$$

ὅπου $\partial\Psi$ ἡ στοιχειώδης μεταβολή τῆς μαγνητικῆς ροῆς, πού διαπερνᾶ τήν ἐπιφάνεια ἑνός πλαισίου, σέ χρόνο ∂t καί $U_{\varepsilon\pi}$ ἡ ἐπα-

---

*) Τό χαρακτηριστικό μέγεθος τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἔνταση $\vec{E}$ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι τό $\vec{B}$, πού πρίν τό λέγαμε "μαγνητική ἐπαγωγή" καί τώρα θά τό λέμε " ἔνταση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου". Στό μέγεθος $\vec{D}$ (πρώην "διηλεκτρική μετατόπιση"), πού θά τό λέμε "ἠλεκτρική διέγερση", ἀντιστοιχεῖ τό $\vec{H}$, πού θά τό λέμε "μαγνητική διέγερση" (πρώην "ἔνταση μαγνητικοῦ πεδίου")

γωγική τάση, πού άναπτύσσεται στά άκρα τοῦ πλαισίου .

2.1.3. Νόμος τοῦ Gauss γιά τήν ἠλεκτρική διέγερση $\vec{D}$.

Ὁ νόμος αὐτός, πού εἶναι γνωστός καί ὡς " νόμος τῆς ἠλεκτρικῆς ροῆς " διατυπώνεται ἔτσι:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV = q \qquad (2-3)$$

ὅπου S εἶναι μιά κλειστή ἐπιφάνεια, πού περιορίζει ἕναν ὄγκο V, ρ ἡ πυκνότητα φορτίου καί q τό ὁλικό φορτίο μέσα στόν ὄγκο V .

2.1.4. Νόμος τοῦ Gauss γιά τό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.

Ὁ νόμος αὐτός διατυπώνεται μέ τή σχέση :

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (2-4)$$

καί ἐκφράζει ὅτι δέν ὑπάρχουν μεμονωμένα μαγνητικά " φορτία " (ποσότητες μαγνητισμοῦ) .

2.1.5. Νόμος τοῦ Ohm.

Στή γενική του μορφή ὁ νόμος τοῦ Ohm ἔχει τή μορφή

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (2-5)$$

ὅπου $\vec{J}$ ἡ πυκνότητα ρεύματος σέ κάποιο σημεῖο μέσα σ' ἕναν ἀγωγό, σ ἡ εἰδική ἀγωγιμότητά του καί $\vec{E}$ ἡ ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στό σημεῖο αὐτό.

2.2. Οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell.

2.2.1. Πρώτη ἐξίσωση τοῦ Maxwell.

'Από τό νόμο τοῦ Ampere ἔχουμε:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \qquad (2\text{-}6)$$

ὅπου $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ ἡ πυκνότητα ρεύματος ἀγωγῆς καί σ ἡ εἰδική ἀγωγιμότητα, ἤ $\vec{J}=\rho\vec{u}$ ἡ πυκνότητα ρεύματος μεταφορᾶς.

'Ο Maxwell γιά νά κάνει τό νόμο τοῦ Ampere νά ἰσχύει καί στήν περίπτωση τῆς κίνησης κύματος στόν ἐλεύθερο χῶρο, ὅρισε τό μέγεθος :

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (2\text{-}7)$$

καί τό ὀνόμασε " πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης " (displacement current density). Καί στήν (2-6) ἀντί τοῦ $\vec{J}$ χρησιμοποίησε τό ἄθροισμα $\vec{J}+\vec{J}_d$. Δηλαδή :

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \qquad (2\text{-}8)$$

'Εφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ Stokes :

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

γράφουμε τήν (2-8) ὡς ἑξῆς :

$$\int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{H} - \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \right] \cdot d\vec{S} = 0 \qquad (2\text{-}9)$$

'Επειδή όμως ή έπιφάνεια S εἶναι αὐθαίρετη, γιά νά άληθεύει ή (2-9) πρέπει :

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \qquad (2\text{-}10)$$

'Η σχέση (2-10) έκφράζει τήν 1^{η} έξίσωση τοῦ Maxwell, ὅπου $\vec{J}$ ή πυκνότητα ρεύματος άγωγῆς (ὅταν πρόκειται γιά κίνηση φορτίων μέσα σέ ὑλικό) ἤ ή πυκνότητα τοῦ ρεύματος μεταφορᾶς (ὅταν πρόκειται γιά κίνηση φορτίων στόν έλεύθερο χῶρο) καί $\partial\vec{D}/\partial t$ ὁ ρυθμός μεταβολῆς τῆς ήλεκτρικῆς διέγερσης (πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης).

2.2.2. Δεύτερη ἐξίσωση τοῦ Maxwell.

'Από τό νόμο τοῦ Faraday καί άπό τήν ὁλική μαγνητική ροή, πού διαπερνᾶ τήν έπιφάνεια, πού περιορίζεται άπό τό πλαίσιο :

$$\Psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad (2\text{-}11)$$

ἔχουμε :

$$U_{\varepsilon\pi} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

άλλά :

$$U_{\varepsilon\pi} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

῞Ωστε:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad (2\text{-}12)$$

᾿Εφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ Stokes ἔχουμε :

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

ἤ

$$\int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (2\text{-}13)$$

᾿Επειδή καί πάλι ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι αὐθαίρετη, γιά νά ἰσχύει ἡ (2-13) πρέπει :

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \qquad (2\text{-}14)$$

῾Η (2-14) ἀποτελεῖ τή 2^{η} ἐξίσωση τοῦ Maxwell.

2.2.3. Τρίτη ἐξίσωση τοῦ Maxwell.

᾿Από τό νόμο τοῦ Gauss (2-3) γιά τήν $\vec{D}$ εἶναι :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV$$

᾿Εφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ Gauss , ἔχουμε :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dV = \int_V \rho\, dV$$

$$\int_V [\vec{\nabla}\cdot\vec{D} - \rho]\, dV = 0 \qquad (2\text{-}15)$$

'Από ὅπου προκύπτει ἡ 3^{η} ἐξίσωση τοῦ Maxwell:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho} \qquad (2\text{-}16)$$

2.2.4. Τέταρτη ἐξίσωση τοῦ Maxwell.

'Από τό νόμο τοῦ Gauss (2-4) γιά τό $\vec{B}$:

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

ἔχουμε :

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = 0 \qquad (2\text{-}17)$$

'Επειδή ὁ ὄγκος V καί ἡ ἐπιφάνεια S μποροῦν νά παρθοῦν αὐθαίρετα γιά νά ἀληθεύει ἡ (2-17) πρέπει :

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0} \qquad (2\text{-}18)$$

'Η (2-18) εἶναι ἡ 4^{η} ἐξίσωση τοῦ Maxwell·.

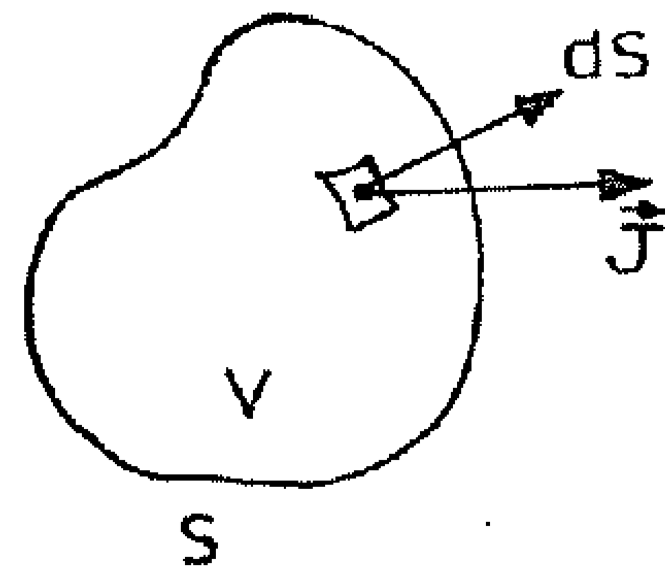
2.3. Ἡ ἐξίσωση τῆς συνέχειας.

'Η ἐξίσωση τῆς συνέχειας εἶναι μερική περίπτωση τῆς γενικῆς ὁμώνυμης ἐξίσωσης καί εἶναι ἀπόρροια τῆς ἀρχῆς τῆς διατήρησης τοῦ φορτίου :

Τό ὁλικό φορτίο, πού περιέχει ὁ ὄγκος V (βλ.σχ.2-1) εἶναι :

$$q = \int_V \rho\, dV \qquad (2\text{-}19)$$

"Αν μέσα στόν ὄγκο V δέν ὑπάρχουν πηγές οὔτε καταβόθρες φορτίου , τότε :



Σχ. 2-1 ἡ ἐξίσωση τῆς συνέχειας βασίζεται στήν ἀρχή τῆς διατήρησης τοῦ φορτίου μέσα στόν ὄγκο V .

$$\begin{pmatrix}\text{ρυθμός ἐλάττωσης}\\ \text{τοῦ φορτίου q μέ-}\\ \text{σα στόν ὄγκο V}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{ρυθμός ἐκροῆς}\\ \text{φορτίου μέσω}\\ \text{τῆς S}\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}20)$$

ἤ

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho\, dV\right) = \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \qquad (2\text{-}21)$$

Μέ ἐφαρμογή τοῦ Θεωρήματος τοῦ Gauss ἡ (2-21) γίνεται :

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, dV \qquad (2\text{-}22)$$

ἤ

$$\int_V \left[\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dV = 0 \qquad (2\text{-}23)$$

Ἐπειδή, ὅμως, ὁ ὄγκος V εἶναι αὐθαίρετος, πρέπει :

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \qquad (2\text{-}24)$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Ἡ ἐξίσωση τῆς συνέχειας εἶναι δυνατό νά προκύψει ἀπό τήν πρώτη καί τήν τρίτη ἐξίσωση τοῦ Maxwell :

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (2\text{-}25)$$

$$\vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 - \frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})}{\partial t}$$

Ἀλλά $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$

Ὥστε : $$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (2\text{-}26)$$

Δηλαδή, ἡ ἐξίσωση τῆς συνέχειας περιέχεται μέσα στίς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell .

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-Ι

Οἱ Βασικές Ἐξισώσεις τοῦ Ἠλεκτρομαγνητισμοῦ.

Ἐξισώσεις τοῦ Maxwell			
Ὁλοκληρωτική μορφή		**Διαφορική μορφή**	
$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$	(2-27)	$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	(2-31)
$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	(2-28)	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(2-32)
$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV$	(2-29)	$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$	(2-33)
$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	(2-30)	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	(2-34)

Ἐξίσωση τῆς συνέχειας : $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (2-35)

Ἐξίσωση τῆς δύναμης : $\vec{F} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}$, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{\upsilon}\times\vec{B})$ (2-36)

Ἐξισώσεις τοῦ μέσου					
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P}$	(2-37)	$\vec{H} = \mu^{-1}\vec{B} = \mu_o^{-1}\vec{B} - \vec{M}$	(2-41)	$\vec{J} = \sigma\vec{E}$ ἤ	
$\vec{P} = \chi_e\varepsilon_o\vec{E}$	(2-38)	$\vec{M} = \frac{\chi_m}{1+\chi_m}\mu_o^{-1}\vec{B} = \chi_m\vec{H}$	(2-42)	$\vec{J} = \rho\vec{\upsilon}$	(2-45)
$\varepsilon = \varepsilon_o(1+\chi_e)$	(2-39)	$\mu = \mu_o(1+\chi_m)$	(2-43)	$\upsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$	(2-46)
$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = 1+\chi_e$	(2-40)	$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} = 1+\chi_m$	*) (2-44)	$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_o\mu_o}$	(2-47)

ΟΡΟΛΟΓΙΑ

$\vec{E}$: Ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου	μ_r : σχετική μαγν. διαπερατότητα
$\vec{B}$: " " μαγνητικοῦ "	χ_e : ἠλεκτρική ἐπιδεκτικότητα
$\vec{D}$: ἠλεκτρική διέγερση τοῦ μέσου	χ_m : μαγνητική "
$\vec{H}$: μαγνητική " " "	σ : εἰδική ἀγωγιμότητα
$\vec{J}$: πυκνότητα ρεύματος ἀγωγῆς ἤ μεταφορᾶς	$\vec{P}$: ἠλεκτρική πόλωση τοῦ μέσου
	$\vec{M}$: μαγνητική " " "
ρ : πυκνότητα φορτίου	c : ταχύτητα κύματος στό κενό
ε : ἀπόλυτη διηλεκτρική σταθερά	υ : " " σέ ὑλικό μέσο
ε_r : σχετική " "	ε_o : διηλ. σταθερά τοῦ κενοῦ (ἀπόλ.)
μ : ἀπόλυτη μαγν. διαπερατότητα	μ_o : μαγν. διαπερ/τητα " " (")

*) Οἱ τύποι (2-41) - (2-44) θά εἶχαν πλήρη ἀναλογία μέ τούς (2-37) - (2-40) ἄν εἶχε ὁριστεῖ $\mu^* = \mu^{-1}$, $\mu_o^* = \mu_o^{-1}$, $\chi_e^* = \chi_e$ καί $\chi_m^* = -\frac{\chi_m}{1+\chi_m}$

2.4. Οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell ὅταν τά πεδία καί οἱ πηγές τους εἶναι ἁρμονικά.

Ὅταν τά πεδία καί οἱ πηγές τους εἶναι ἁρμονικές συναρτήσεις τοῦ χρόνου, τότε χρησιμοποιώντας μιγαδική ἀνάλυση μποροῦμε νά χειριστοῦμε εὐκολότερα τίς ἐξισώσεις (βλ. παρ. 1.8),ἄν ἀντί τῶν πραγματικῶν πεδίων πάρουμε τά ἀντίστοιχα φασικά (phasors) . Γιά τήν κάθε περίπτωση,ξεκινᾶμε χρησιμοποιώντας στήν ἀντίστοιχη διαφορική ἐξίσωση, τίς τελεστικές ἀντιστοιχίες (1-67) , (1-68) ἐφαρμοσμένες πάνω στούς ἀντίστοιχους phasors .

2.4.1. Πρώτη ἐξίσωση τοῦ Maxwell.

Ἀπό τή (2-10) ἔχουμε :

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + j\omega\vec{\mathcal{D}} \qquad (2\text{-}48)$$

ἤ

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{\mathcal{E}} \qquad (2\text{-}49)$$

2.4.2. Δεύτερη ἐξίσωση τοῦ Maxwell.

Ἀπό τή (2-14) ἔχουμε :

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\vec{\mathcal{B}} \qquad (2\text{-}50)$$

2.4.3. Τρίτη ἐξίσωση τοῦ Maxwell.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (2-16) προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{D}} = \rho \qquad (2\text{-}51)$$

2.4.4. Τέταρτη ἐξίσωση τοῦ Maxwell.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (2-18) προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0 \qquad (2\text{-}52)$$

2.4.5. Ἐξίσωση τῆς συνέχειας.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (2-24) προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{J}} + j\omega\rho = 0 \qquad (2\text{-}53)$$

3. ΤΟ ΜΟΝΟΜΕΤΡΟ ΚΑΙ ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΔΙΟΥ.

3.1. Ὁρισμοί.

Ἀπό τήν ἐξίσωση

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

βγάζουμε τό συμπέρασμα ὅτι μποροῦμε νά γράφουμε :

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \qquad (3\text{-}2)$$

δεδομένου ὅτι γιά κάθε διάνυσμα $\vec{A}$ εἶναι $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$.

Τό διανυσματικό πεδίο $\vec{A}$, πού ὁρίσαμε μ' αὐτόν τόν τρόπο , λέγεται δ ι α ν υ σ μ α τ ι κ ό δ υ ν α μ ι κ ό .

Ἀπό τή 2η ἐξίσωση τοῦ Maxwell ἔχουμε :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (3\text{-}3)$$

Ὁλοκληρώνοντας τήν (3-3) ἔχουμε :

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{K} \qquad (3\text{-}4)$$

ὅπου $\vec{K}$ = σταθερό διάνυσμα τέτοιο ὥστε :

$$\vec{\nabla}\times\vec{K} = 0 \qquad (3\text{-}5)$$

καί ἄρα μπορεῖ νά εἶναι

$$\vec{K} = \vec{\nabla}\Phi \qquad (3\text{-}6)$$

ὅπου Φ = μονόμετρο πεδίο. Ὥστε :

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} \qquad (3\text{-}7)$$

Τό πεδίο Φ λέγεται μ ο ν ό μ ε τ ρ ο δ υ ν α μ ι κ ό .

Στήν περίπτωση άρμονικά μεταβαλλόμενων πεδίων οί σχέσεις, (3-2) καί (3-7) γράφονται:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (3\text{-}8)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\phi - j\omega\vec{A} \qquad (3\text{-}9)$$

3.2.Ἐξισώσεις Πεδίου διατυπώμενες μέ τά δυναμικά.

Στήν $1^{η}$ ἐξίσωση τοῦ Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (3\text{-}10)$$

θέτουμε:

$$\vec{H} = \mu^{-1}\vec{B} \qquad (3\text{-}11)$$

καί

$$\vec{J} = \vec{J}_i + \vec{J}_r \qquad (3\text{-}12)$$

ὅπου $\vec{J}_i$ ἡ πυκνότητα ρεύματος, πού ἐπιβάλλεται ἀπό ἔξω καί λέγεται π υ κ ν ό τ η τ α ρ ε ύ μ α τ ο ς ἐ π ι β ο λ ῆ ς καί $\vec{J}_r$ ἡ πυκνότητα τοῦ ρ ε ύ μ α τ ο ς ἀ π ό κ ρ ι σ η ς (ὁ χωρισμός αὐτός τοῦ $\vec{J}$ εἶναι γενικά αὐθαίρετος καί ἐξαρτᾶται ἀπό τό συγκεκριμένο πρόβλημα) .

Τό ρεῦμα ἀπόκρισης μπορεῖ νά εἶναι ρεῦμα ἀγωγῆς ἤ καί ρεῦμα μεταφορᾶς. Στά παρακάτω θά ὑποθέσουμε τό πρῶτο . Δηλαδή:

$$\vec{J}_r = \sigma\vec{E} \qquad (3\text{-}13)$$

Στή (3-10) θέτουμε ἐπίσης :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (3\text{-}14)$$

καί

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \qquad (3\text{-}15)$$

καί έχουμε :

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \mu\sigma\vec{E} + \mu\vec{J}_i + \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (3\text{-}16)$$

'Αντικαθιστώντας

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (3\text{-}17)$$

καί

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \qquad (3\text{-}18)$$

καί

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \qquad (3\text{-}19)$$

έχουμε :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = -\mu\sigma\vec{\nabla}\Phi - \mu\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \mu\vec{J}_i - \varepsilon\mu\vec{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \qquad \text{ή}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\mu\vec{J}_i + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sigma\mu\Phi\right) \qquad (3\text{-}20)$$

'Από τήν (3-2) δέν ορίζεται μονοσήμαντα τό δυναμικό $\vec{A}$ (άλλά ορίζεται μιά ολόκληρη κλάση διανυσμάτων). Γιά νά τό προσδιορίσουμε μονοσήμαντα πρέπει έκτός άπό τό $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ νά έχουμε καί τό $\vec{\nabla}.\vec{A}$. 'Ο Lorentz διατύπωσε τή συνθήκη .

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sigma\mu\Phi = 0} \qquad (3\text{-}21)$$

πού λέγεται συνθήκη τοῦ Lorentz καί πού προσδιορίζει τήν $\vec{\nabla}.\vec{A}$. Μέ τή συνθήκη τοῦ Lorentz ή (3-20) παίρνει τήν τελική της μορφή :

$$\boxed{\nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\vec{J}_i}{\mu^{-1}}} \qquad (3\text{-}22)$$

'Από τήν 3η έξίσωση τοῦ Maxwell ἔχουμε :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$$

ἤ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

ἤ

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

ἤ

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}{\partial t} = \frac{-\rho}{\varepsilon} \qquad (3\text{-}23)$$

'Αντικαθιστώντας τό $\vec{\nabla}.\vec{A}$ ἀπό τή δεσμευτική συνθήκη τοῦ Lorentz στήν (3-23) ἔχουμε :

$$\boxed{\nabla^2\Phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}} \qquad (3\text{-}24)$$

Οἱ ἐξισώσεις (3-22) καί (3-24) εἶναι οἱ διαφορικές ἐξισώσεις τῶν δυναμικῶν. 'Απ' αὐτές προσδιορίζονται τά δυναμικά σέ συνάρτηση μέ τίς πηγές τους ($\vec{J}_i$ καί ρ). Οἱ ἐξισώσεις αὐτές εἶναι μή ὁμογενεῖς γενικευμένες διαφορικές ἐξισώσεις κύματος.

'Η συνθήκη , λοιπόν, τοῦ Lorentz ἐξασφαλίζει ὥστε τά δυναμικά $\vec{A}$ καί Φ νά ἱκανοποιοῦν τή μή ὁμογενή γενικευμένη διαφορική ἐξίσωση κύματος*) .

Θέτοντας

$$\varepsilon\mu = \frac{1}{\upsilon^2} \qquad (3\text{-}25)$$

γράφουμε τίς (3-22),(3-24) ἔτσι:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\vec{J}_i}{\mu^{-1}} \\ &\nabla^2\Phi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned}} \qquad (3\text{-}26)$$

---

*) 'Η δεσμευτική συνθήκη τοῦ Lorentz ἐξασφαλίζει τή συναλλοίωτη (covariant) τανυστική σχέση μεταξύ τῶν δυναμικῶν $\vec{A}$ καί Φ.

῎Εχοντας ὑπόψη τή γενική μή ὁμογενή διαφορική ἐξίσωση κύματος, ἀπό τίς (3-26) βγάζουμε τό συμπέρασμα ὅτι ἡ ταχύτητα τοῦ κύματος, πού περιγράφουν, εἶναι υ δηλαδή :

$$\boxed{\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}} \tag{3-27}$$

ἐνῶ ὁ ὅρος $-\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}$ εἶναι ἕνας " ὅρος ἀπόσβεσης " , πού ἐξαφανίζεται ὅταν ἡ εἰδική ἀγωγιμότητα σ = 0 .

῾Ο τελεστής

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{3-28}$$

λέγεται χωροχρονικός τ ε λ ε σ τ ή ς τοῦ D'A l e m b e r t*).

Χρησιμοποιώντας τόν τελεστή αὐτό, π.χ. γιά τήν περίπτωση τοῦ κενοῦ (ὅπου σ = 0) γράφουμε τίς (3-26) ἔτσι:

$$\square^2 \vec{A} = -\frac{\vec{J}_i}{\mu^{-1}} \tag{3-29}$$

$$\square^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

῞Οταν δέν ὑπάρχουν " διεγέρσεις " ($\vec{J}_i$=0, ρ=0) τότε οἱ (3-26) γίνονται ὁμογενεῖς .

---

*) ῾Ο τελεστής τοῦ D'Alembert ὅταν ἐφαρμόζεται, στήν περίπτωση ἁρμονικοῦ πεδίου τῆς μορφῆς $\mathcal{A}e^{j\omega t}$ γράφεται :

$$\square^2 \equiv \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial(j\upsilon t)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial(j\upsilon t)^2}$$

(ὅπου x,y,z,jυt οἱ συντεταγμένες στόν χῶρο τοῦ Mincowski), ἐνῶ γιά φασικό πεδίο (phasor) $\vec{\mathcal{A}}$ γράφεται :

$$\square^2 \equiv \nabla^2 + \frac{\omega^2}{\upsilon^2}$$

3.3. Ἐξισώσεις τῶν πεδίων $\vec{E}$ καί $\vec{B}$.

Ἄς φανταστοῦμε ἕνα ὁμογενές καί ἰσότροπο μέσο καί ἄς μελετήσουμε τά πεδία $\vec{E}$ καί $\vec{B}$ μέσα στό μέσο αὐτό.

Ἀπό τήν 1^η ἐξίσωση τοῦ Maxwell ἔχουμε :

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_i + \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (3\text{-}30)$$

καί

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{J}_i}{\partial t} + \sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad (3\text{-}31)$$

ἤ

$$-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \mu\frac{\partial\vec{J}_i}{\partial t} + \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

ἤ

$$-\left(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}\right) = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\frac{\partial\vec{J}_i}{\partial t} \qquad (3\text{-}32)$$

Ἀλλά εἶναι:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (3\text{-}33)$$

Ἀπό τίς (3-32) καί (3-33) προκύπτει ἡ διαφορική ἐξίσωση τοῦ $\vec{E}$:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\rho + \frac{1}{\mu^{-1}}\frac{\partial\vec{J}_i}{\partial t}} \qquad (3\text{-}34)$$

Σέ σημεῖα ὅπου δέν ὑπάρχουν φορτία ($\rho=0$) οὔτε ρεύματα ἐπιβολῆς ($\vec{J}_i=0$) ἡ (3-34) γίνεται:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0} \qquad (3\text{-}35)$$

Ἄν ἐπιπλέον τό μέσο δέν ἔχει ἀπώλειες (σ=0) τότε ἡ (3-35) γίνεται :

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{ἤ} \qquad \Box^2\vec{E} = 0 \tag{3-36}$$

Ἀπό τή 2η ἐξίσωση τοῦ Maxwell ἔχουμε :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{3-37}$$

$$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{3-38}$$

Ἀπό τήν (3-30) ἔχουμε :

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}(\vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{J}_i - \sigma\vec{E}) \qquad \text{καί}$$

$$\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\times\vec{J}_i - \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{\nabla}\times\vec{E} \tag{3-39}$$

Ἀπό τίς (3-38) καί (3-39) προκύπτει :

$$-\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}) - \nabla^2\vec{H} - \vec{\nabla}\times\vec{J}_i + \sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{3-40}$$

καί ἐπειδή

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \text{καί} \qquad \nabla^2\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla^2\vec{B}$$

ἔχουμε τελικά:

$$\boxed{\nabla^2\vec{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}\times\vec{J}_i}{\mu^{-1}}} \tag{3-41}$$

Στήν περίπτωση πού δέν ὑπάρχουν ρεύματα ἐπιβολῆς ($\vec{J}_i=0$) ἡ (3-41) γίνεται:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} \qquad (3\text{-}42)$$

Ἄν ἐπιπλέον τό μέσο δέν ἔχει ἀπώλειες ($\sigma=0$) τότε ἡ (3-42) γίνεται:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{ἤ} \qquad \Box^2 \vec{B} = 0 \qquad (3\text{-}43)$$

ὅπου υ ἡ ταχύτητα τῆς διάδοσης τοῦ κύματος μέσα στό μέσο αὐτό καί πού τή δίνει ἡ σχέση (3-27).

3.4. Οἱ ἐξισώσεις τῶν δυναμικῶν $\vec{A}$ καί Φ καί τῶν πεδίων $\vec{E}$ καί $\vec{B}$ ὅταν αὐτά εἶναι ἁρμονικά.

Στήν περίπτωση πού πηγές καί πεδία εἶναι ἁρμονικές συναρτήσεις τοῦ χρόνου, μποροῦμε νά ἐκφράσουμε τίς διαφορικές ἐξισώσεις τῶν $\vec{A}$, Φ, $\vec{E}$ καί $\vec{B}$, πού ἀναφέραμε στά προηγούμενα, μέ τά ἀντίστοιχα φασικά μεγέθη (phasors) $\vec{\mathcal{A}}$, ϕ, $\vec{\mathcal{E}}$ καί $\vec{\mathcal{B}}$. Ἔτσι οἱ (3-22) καί (3-24) γράφονται:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} + \omega^2 \varepsilon\mu \vec{\mathcal{A}} - j\omega\mu\sigma \vec{\mathcal{A}} = -\frac{\vec{\mathcal{J}}_i}{\mu^{-1}} \qquad (3\text{-}44)$$

$$\nabla^2 \phi + \omega^2 \varepsilon\mu \phi - j\omega\mu\sigma \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (3\text{-}45)$$

καί οἱ (3-34) καί (3-41) γράφονται:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} + \omega^2 \varepsilon\mu \vec{\mathcal{E}} - j\omega\mu\sigma \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla}\rho + \frac{j\omega \vec{\mathcal{J}}_i}{\mu^{-1}} \qquad (3\text{-}46)$$

$$\nabla^2 \mathcal{B} + \omega^2 \varepsilon\mu \mathcal{B} - j\omega\mu\sigma \mathcal{B} = -\frac{\vec{\nabla}\times \vec{\mathcal{J}}_i}{\mu^{-1}} \tag{3-47}$$

3.5. Ἐφαρμογή στή διάδοση ἐπίπεδου μονοχρωματικοῦ κύματος.

Θεωροῦμε ἕνα μέσο ὁμογενές καί ἰσότροπο, πού δέν περιέχει "διεγέρσεις" δηλ. εἶναι $\vec{J}_i=0$, $\rho=0$. Στήν περίπτωση ἁρμονικοῦ κύματος, μέ κυκλική συχνότητα ω , τό ἠλεκτρικό πεδίο θά ἱκανοποιεῖ τή διαφορική ἐξίσωση (3-46) μέ $\rho=0$ καί $\vec{J}_i=0$ πού μποροῦμε νά τήν ξαναγράψουμε ἔτσι:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - (-\omega^2 \varepsilon\mu + j\omega\sigma\mu)\,\vec{\mathcal{E}} = 0 \tag{3-48}$$

καί ἄν

$$\gamma^2 \equiv -\omega^2 \varepsilon\mu + j\omega\mu\sigma \tag{3-49}$$

ἡ (3-48) γράφεται:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \gamma^2 \vec{\mathcal{E}} = 0 \tag{3-50}$$

Ἄν περιοριστοῦμε σέ πεδίο $\vec{E}$ πολωμένο κατά τή διεύθυνση $\hat{y}$ καί διαδιδόμενο κατά τή διεύθυνση $\hat{x}$ μποροῦμε νά γράψουμε γιά τό φασικό ἠλεκτρικό πεδίο :

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_y(x)\,\hat{y} \tag{3-51}$$

πού σέ κάθε ἐπίπεδο x = σταθ. ἔχει σταθερή τιμή εἶναι δηλ. ἀνεξάρτητο ἀπό τά y καί z (ἐπίπεδο κύμα) .

Ἀπό τήν (3-51) ἡ (3-50) γίνεται :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_y}{\partial x^2} - \gamma^2 \mathcal{E}_y = 0 \tag{3-52}$$

Ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση τῆς (3-52) εἶναι $\nu^2 - \gamma^2 = 0$ ὁπότε $\nu = \pm\gamma$ καί ἡ γενική λύση της εἶναι :

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_1 e^{\gamma x} + \mathcal{E}_2 e^{-\gamma x} \tag{3-53}$$

ὅπου $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ μιγαδικές, γενικά, σταθερές :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= E_1 \, e^{j\delta_1} \\ \mathcal{E}_2 &= E_2 \, e^{j\delta_2} \end{aligned} \tag{3-54}$$

Ἀπό τήν (3-49) εἶναι :

$$\boxed{\gamma = \sqrt{-\omega^2 \varepsilon\mu + j\omega\mu\sigma}} \tag{3-55}$$

Γενικά, μποροῦμε νά γράψουμε :

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta} \tag{3-56}$$

Ἡ σταθερά γ λέγεται " σταθερά τῆς διάδοσης ", ἡ α λέγεται "σταθερά τῆς ἐξασθένησης" καί ἡ β "σταθερά τῆς φάσης" .
Ἡ (3-53) λοιπόν γράφεται:

$$\boxed{\mathcal{E}_y = E_1 \, e^{\alpha x} \, e^{j(\beta x + \delta_1)} + E_2 \, e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \delta_2)}} \tag{3-57}$$

Πολλαπλασιάζοντας ἐπί $\hat{y} e^{j\omega t}$ καί παίρνοντας τό πραγματικό μέρος ἔχουμε :

$$\boxed{\vec{E} = \hat{y} E_1 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \delta_1) + \hat{y} E_2 \, e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \delta_2)} \tag{3-58}$$

Ἡ γενική λύση (3-58) εἶναι ἐπαλληλία δύο ἐπίπεδων κυμάτων , πού διαδίδονται κατά διευθύνσεις ἀντίθετες ὅπως φαίνεται ἀπό τήν ἀντίθεση τοῦ προσήμου τοῦ x στούς δύο ὅρους .

3.5.1. Σέ μέσο χωρίς ἀπώλειες ($\sigma=0$, ἤ $\sigma \ll \omega\varepsilon$)

Στήν περίπτωση αὐτή ἡ (3-55) δίνει:

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2\varepsilon\mu} = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad (3\text{-}59)$$

Ὥστε ἡ σταθερά τῆς φάσης εἶναι:

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad (3\text{-}60)$$

ἐνῶ ἡ σταθερά τῆς ἐξασθένησης εἶναι

$$\alpha = 0 \qquad (3\text{-}61)$$

Ὥστε ἡ γενική λύση (3-58), στήν περίπτωση πού $\sigma = 0$, γίνεται :

$$\boxed{\vec{E} = \hat{y}E_1\cos(\omega t+\beta x+\delta_1)+\hat{y}E_2\cos(\omega t-\beta x+\delta_2)} \qquad (3\text{-}62)$$

Ὁ δεύτερος προσθετέος τῆς (3-62) ἀντιπροσωπεύει ἐπίπεδο κύμα, πού διαδίδεται πρός τά θετικά x, ἐνῶ ὁ πρῶτος ἐπίπεδο κύμα, πού διαδίδεται πρός τά ἀρνητικά x. Τά E_1 καί E_2 εἶναι οἱ τιμές πλάτους καί τά δ_1, δ_2 οἱ τιμές φάσης, πού ἐξαρτῶνται ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες.

Παρατηροῦμε στήν (3-62) ὅτι τά πλάτη τῶν κυμάτων μένουν τά ἴδια (σταθερά) κατά τή διάδοση, δέν ἔχουμε δηλ. ἐξασθένηση τῶν κυμάτων.

3.5.2. Σέ μέσο μέ μεγάλη ἀγωγιμότητα ($\sigma \gg \omega\varepsilon$)

Ἄν

$$\sigma \gg \omega\varepsilon \qquad (3\text{-}63)$$

τότε

$$\omega\mu\sigma \gg \omega^2\mu\varepsilon$$

καί ἡ (3-55) δίνει:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} \qquad (3\text{-}64)$$

ή $\gamma = \sqrt{\omega\mu\sigma e^{j\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\omega\mu\sigma}\, e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\omega\mu\sigma}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\omega\mu\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

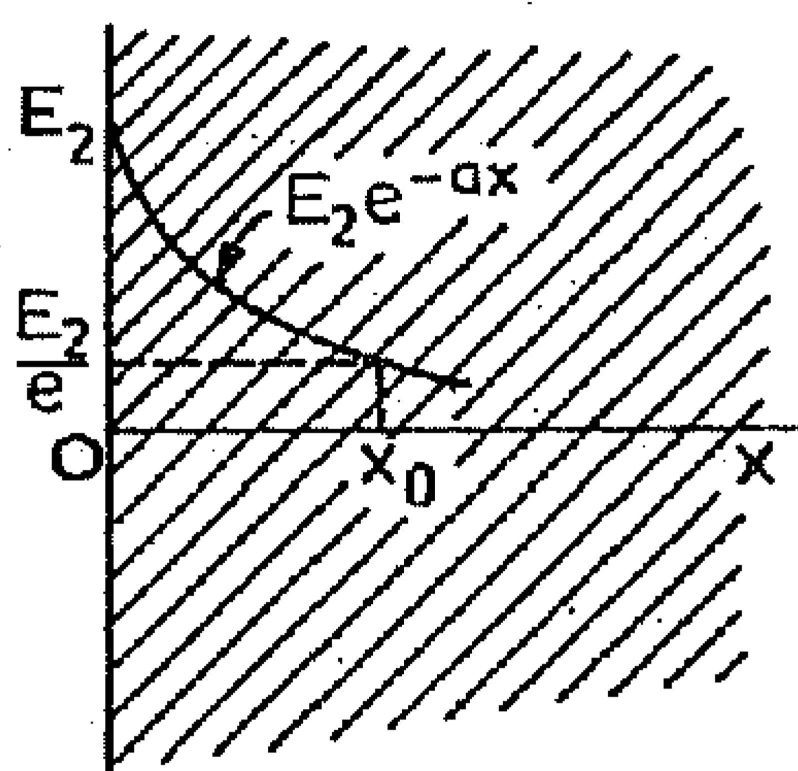
ή
$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \qquad (3\text{-}65)$$

Ώστε :

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} > 0 \qquad (3\text{-}66)$$

Έτσι, ή γενική λύση (3-58) ίσχύει όπως είναι μέ α καί β τίς τιμές τής (3-66).

Έχουμε πάλι δύο έπίπεδα κύματα, πού τό ένα (πρώτος προσθετέος) τρέχει πρός τά άρνητικά x καί τό άλλο (δεύτερος προσθετέος) πρός τά θετικά x. Τά πλάτη τους, όμως, δέν μένουν σταθερά άλλά έλαττώνονται έκθετικά τοῦ πρώτου κατά τόν παράγοντα $e^{\alpha x}$ (πού μικραίνει όταν μικραίνει τό x, πρός τά άρνητικά x δηλαδή) καί τοῦ δεύτερου κατά τόν παράγοντα $e^{-\alpha x}$ (πού κι αύτός μικραίνει όσο αύξάνεται τό x). Καί στά δύο κύματα δηλαδή ό έκθετικός παράγοντας, πού περιέχει τό α είναι παράγοντας έξασθένησης.



Σχ. 3-1 Τό βάθος διείσδυσης x_0 είναι τό βάθος έκεῖνο, μέσα στό ύλικό, στό όποῖο ή ένταση τοῦ πεδίου πέφτει e φορές κάτω άπό τήν τιμή, πού έχει στήν έπιφάνεια τοῦ ύλικοῦ.

Έτσι άν πάρουμε τήν άρχή τῶν άξόνων στήν άκρη τοῦ ύλικοῦ καί θεωρήσουμε ότι είσχωρεῖ μέσα στό ύλικό τό κύμα τοῦ δεύτερου προσθετέου τής (3.58), τότε σέ κάποιο βάθος x_0 θά είναι :

$$\alpha x_0 = 1 \qquad (3\text{-}67)$$

καί τό πλάτος $E_2e^{-\alpha x}$ θά γίνει F_2/e. Τό πάχος x_0 λέγεται "όπτικό πάχος" ή "βάθος τής διείσδυσης"

Ἀπό τίς (3-66) καί (3-67) ἔχουμε

$$\boxed{x_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}} \qquad (3\text{-}68)$$

Τό βάθος τῆς διείσδυσης εἶναι πολύ μικρό στούς καλούς ἀγωγούς καί στίς πολύ μεγάλες συχνότητες. Στόν τέλειο ἀγωγό ($\sigma=\infty$) εἶναι $x_0 = 0$.

Οἱ ἰσοφασικές ἐπιφάνειες ἑνός ἐπίπεδου κύματος,σάν αὐτά πού μελετήσαμε, εἶναι :

$$\varphi = \omega t \pm \beta x + \delta = \sigma\tau\alpha\vartheta. \qquad (3\text{-}69)$$

ἤ γιά t = σταθ. εἶναι καί x = σταθ. = c (3-70)

Δηλαδή κάθε χρονική στιγμή ὅλα τά σημεῖα πού βρίσκονται πάνω στό ἐπίπεδο $x=c$ ἔχουν τήν ἴδια φάση. Οἱ ἰσοφασικές ἐπιφάνειες, λοιπόν, εἶναι ἐπίπεδα κάθετα στόν ἄξονα x, κατά τόν ὁποῖο γίνεται ἡ διάδοση.

Τό μῆκος κύματος λ εἶναι ἡ ἀπόσταση δύο σημείων , πού τήν ἴδια χρονική στιγμή ἡ φάση τους διαφέρει κατά 2π. δηλαδή

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t \pm \beta x_2 + \delta) - (\omega t \pm \beta x_1 + \delta) = \pm 2\pi \qquad (3\text{-}71)$$

ἤ

$$\beta(x_2 - x_1) = 2\pi$$

ἤ

$$\beta\lambda = 2\pi$$

Ὥστε σέ μέσο μέ $\sigma \gg \omega\varepsilon$

ἔχουμε:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \qquad (3\text{-}72)$$

'Ενῶ σέ μέσο μέ $\sigma \ll \omega\varepsilon$

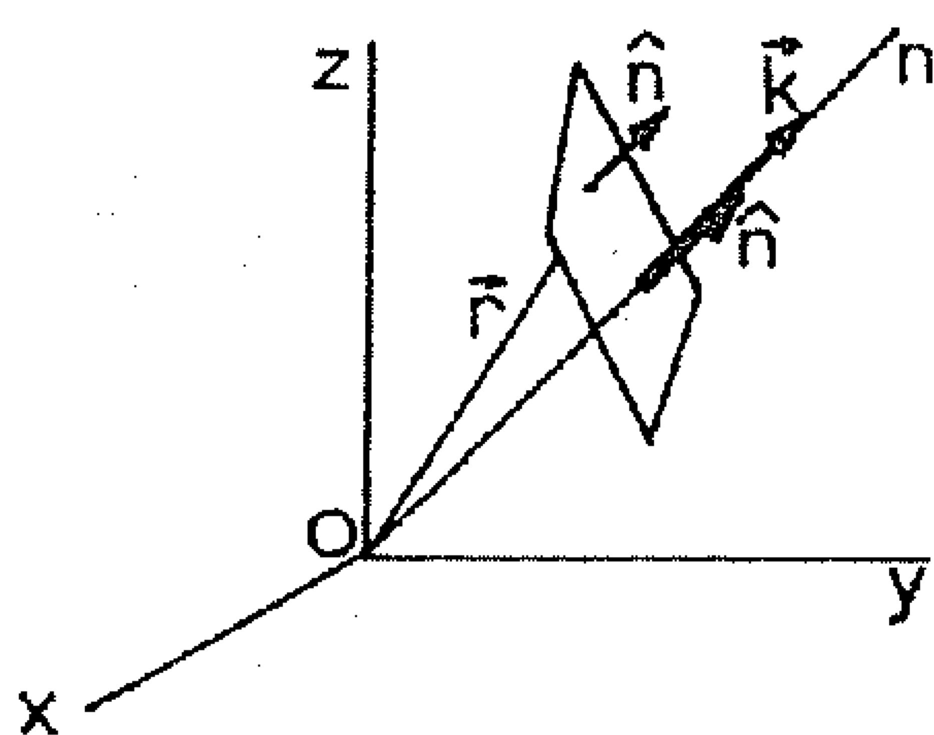
ἔχουμε:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{3-73}$$

'Η σταθερά τῆς φάσης, β , λέγεται καί κ υ μ α τ α ρ ι θ μ ό ς .

3.6. Γενίκευση τῆς Λύσης 'Επίπεδου Κύματος.

Μέ στροφή τῶν ἀξόνων μποροῦμε νά κάνουμε τή λύση, πού μᾶς ἀπασχόλησε στήν προηγούμενη παράγραφο, νά παριστάνει ἕνα ἐπίπεδο κύμα πού διαδίδεται κατά τή διεύθυνση $\hat{n}$ (ὁ ἄξονας x δηλ. θά συμπέσει μέ τόν ἄξονα n (βλ.σχῆμα)).



Σχ. 3-2 'Η Γεωμετρία ἐπίπεδου κύματος πού διαδίδεται κατά τή διεύθυνση $\hat{n}$. Οἱ ἰσοφασικές ἐπιφάνειες εἶναι ἐπίπεδα κάθετα στό $\hat{n}$ καί τό κυματάνυσμα εἶναι $\vec{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\hat{n}$.

Γιά τόν κυματαριθμό τοῦ κύματος ἀντί τοῦ β χρησιμοποιοῦμε τό σύμβολο k .

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{3-74}$$

Θεωροῦμε ὅτι τό πεδίο ἔχει τυχαία κατεύθυνση καί ὅτι γιά κάθε συνιστῶσα τοῦ $\mathcal{E}_i$ (i=x,y,z) ἰσχύει ἡ λύση (3-57) . Ἄν περιοριστοῦμε στό ἕνα ἀπό τά δύο κύματα τῆς (3-57) καί μάλιστα σ' αὐτό πού διαδίδεται κατά τά θετικά n , θά εἶναι :

$$\mathcal{E}_i(\vec{r},t) = \mathcal{E}_i(\vec{r})\, e^{j(\omega t - k\hat{n}.\vec{r})} \tag{3-75}$$

ὅπου

$$\vec{k} = k\hat{n} = kn_x\hat{x} + kn_y\hat{y} + kn_z\hat{z} \tag{3-76}$$

εἶναι τό λεγόμενο κ υ μ α τ ά ν υ σ μ α καί ἔχει προβολές :

$$k_x = kn_x \quad , \quad k_y = kn_y \quad , \quad k_z = kn_z \tag{3-77}$$

Ἂν θεωρήσουμε ὅτι τά ω καί $\vec{k}$ στήν (3-75) μποροῦν νά πάρουν ὅλες τίς τιμές, $\omega \in (0,\infty)$, $k_x, k_y, k_z \in (-\infty, +\infty)$, τότε γιά κάθε ζευγάρι ω καί $\vec{k}$ θά ἔχω καί μία λύση τῆς διαφορικῆς ἐξίσωσης τοῦ $\vec{E}$ ἀνεξάρτητη ἀπό τίς ἄλλες .
Ὁ phasor τοῦ πλάτους $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ καθεμιᾶς τέτοιας λύσης θά ἐξαρτᾶται ἀπό τά ἀντίστοιχα $\vec{k}$ καί ω .
Ἡ περιγραφή ὁποιουδήποτε κύματος (μή ἐπίπεδου καί μή μονοχρωματικοῦ) στό χῶρο $(\omega,\vec{k})$ γίνεται χρονικά μέν μέ ἕνα φάσμα συχνοτήτων Σω , γεωμετρικά δέ μέ ἕνα φάσμα κυματανυσμάτων $\Sigma\vec{k}$.

Ἂν λοιπόν ἀθροίσουμε ὅλες αὐτές τίς μερικές λύσεις θά ἔχουμε τή λεγόμενη γ ε ν ι κ ή λ ύ σ η μέ ἐπαλληλία ἐπίπεδων κυμάτων . Ἔτσι θά ἔχουμε γιά κάθε συνιστώσα $\mathcal{E}_i$ (ὅπως μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ) :

$$\mathcal{E}_i(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_i(\vec{k},\omega)\, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\, dk_x dk_y dk_z \qquad (3\text{-}78)$$

Ἡ (3-78) δείχνει ὅτι ἡ γενική λύση προκύπτει ἀπό τήν ἐφαρμογή ἐπάνω στό $\mathcal{E}_i(\vec{k},\omega)$ ἑνός ὁλοκληρωτικοῦ μετασχηματισμοῦ πού δέν εἶναι ἄλλος ἀπό τό Μετασχηματισμό Fourier .

Ὁ ἀντίστροφος Μετασχηματισμός τῆς (3-78) μπορεῖ νά μᾶς μεταφέρει στό χῶρο $(\vec{k},\omega)$ ἀπό τό χῶρο $(\vec{r},t)$.

$$\mathcal{E}_i(\vec{k},\omega) = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_i(\vec{r},t)\, e^{-j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\, dx\, dy\, dz \qquad (3\text{-}79)$$

Ὥστε οἱ (3-78) καί (3-79) ἀποτελοῦν ἕνα ζεῦγος μετασχηματισμοῦ Fourier καί δίνουν τή γενική λύση τῆς κυματικῆς διαφορικῆς ἐξίσωσης μέ προσέγγιση ἐπίπεδου κύματος .

Σημειώνουμε ὅτι τά ω καί $\vec{k}$ ἔχουν οὐσιαστική φυσική σημασία, γιατί τό πρῶτο ἀντιπροσωπεύει τήν ἐνέργεια $(\hbar\omega)$ καί τό δεύτερο

τήν ὁρμή ($\hbar\vec{k}$) τοῦ quantum τοῦ κύματος.

Στήν περίπτωση μ ο ν ο χ ρ ω μ α τ ι κ ο ῦ ἐ π ί π ε - δ ο υ κ ύ μ α τ ο ς ἰσχύουν οἱ τελεστικές ἀντιστοιχίες:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Longleftrightarrow j\omega \quad \text{καί} \quad \vec{\nabla} \Longleftrightarrow -j\vec{k} \qquad (3\text{-}80)$$

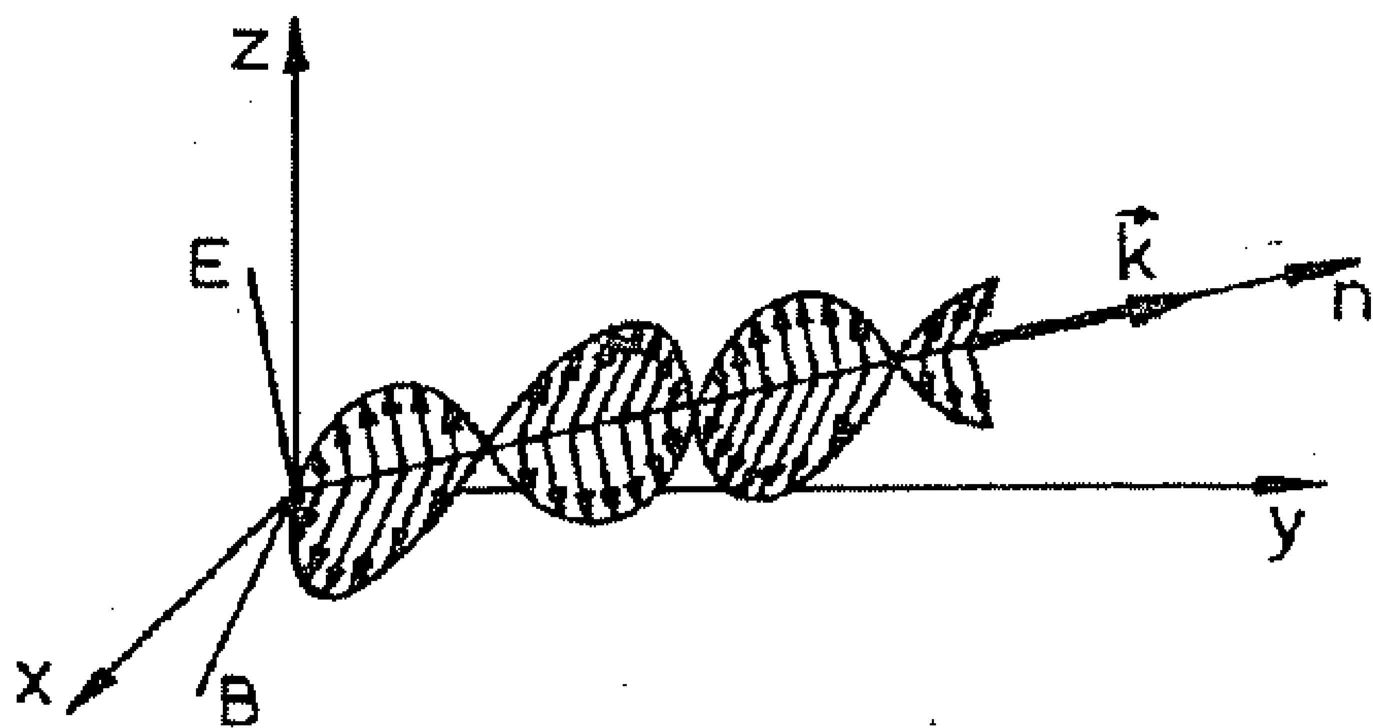
πού μετασχηματίζουν τίς ἐξισώσεις ἀπό τόν ἕνα χῶρο ($\vec{r}$,t) στόν ἄλλο (ω,$\vec{k}$) (γιά $\sigma = 0$ ἤ $\sigma \ll \omega\varepsilon$).

Χρησιμοποιώντας τούς τελεστές (3-80) γράφουμε τήν 1^{η} καί τή 2^{η} ἐξίσωση τοῦ Maxwell ἔτσι :

$$\vec{k} \times \vec{\mathcal{H}} = -\omega\varepsilon\vec{\mathcal{E}} \qquad (3\text{-}81)$$

$$\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = \omega\vec{\mathcal{B}} \qquad (3\text{-}82)$$

Ἀπό τήν (3-82) προκύπτει ὅτι στήν περίπτωση τοῦ μονοχρωματικοῦ ἐπίπεδου κύματος (ω,$\vec{k}$) εἶναι :



Σχ. 3-3 Ἐπίπεδο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα, πού διαδίδεται κατά τή διεύθυνση $\vec{n}$. Τό ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, τό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ καί τό κυματάνυσμα $\vec{k}$ ἀποτελοῦν τρισορθογώνιο σύστημα.

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} \qquad (3\text{-}83)$$

δηλαδή εἶναι

$$\vec{\mathcal{B}} \perp \vec{k} \quad \text{καί} \quad \vec{\mathcal{B}} \perp \vec{\mathcal{E}} \qquad (3\text{-}84)$$

Ἀπό τήν (3-81) προκύπτει ὅτι

$$\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{k} \quad \text{καί} \quad \vec{\mathcal{E}} \perp \vec{\mathcal{B}} \qquad (3\text{-}85)$$

Ὥστε, λοιπόν, στήν περίπτωση πού ἔχουμε μ ο ν ο χ ρ ω μ α τ ι κ ό ἐ π ί π ε δ ο κ ύ μ α (ω,$\vec{k}$), μέσα σέ ὑλικό χωρίς ἀπώλειες, τά δύο κύματα $\vec{E}$ καί $\vec{B}$ εἶναι:

α. συμφασικά

β. κάθετα στό $\vec{k}$ καί μεταξύ τους καί ἐπομένως συνιστοῦν ἕνα ἐγκάρσιο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα (TEM-transverse electromagnetic).

3.7 Διατήρηση τῆς Ἐνέργειας - Θεώρημα τοῦ Poynting.

3.7.1. Γενική Περίπτωση.

Θά ἐξετάσουμε παρακάτω ἕνα χρονικά μεταβαλλόμενο ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο ἀπό ἐνεργειακή ἄποψη. Θεωροῦμε ὅτι ἡ ὀλική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ ἀποτελεῖται ἀπό τίς δύο συνιστῶσες $\vec{J}_i$ καί $\vec{J}_r$ τοῦ ρεύματος ἐπιβολῆς καί τοῦ ρεύματος ἀπόκρισης :

$$\vec{J} = \vec{J}_i + \vec{J}_r \qquad (3\text{-}86)$$

Ἀπό τίς δύο συνιστῶσες ἡ $\vec{J}_i$ παρέχει ἐνέργεια ἐνῶ ἡ $\vec{J}_r$ καταναλώνει .

Θά ὑπολογίσουμε τό ρυθμό, μέ τόν ὁποῖο παρέχεται ἐνέργεια ἀπό τήν $\vec{J}_i$ στό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Ἔστω dq_i τό φορτίο πού βρίσκεται στόν ὄγκο dV καί συμμετέχει στό σχηματισμό τοῦ $\vec{J}_i$ κινούμενο μέ ταχύτητα $\vec{u}_i$. Τό φορτίο αὐτό ἀλληλεπιδρᾶ μέ τό ὀλικό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο καί δέχεται δύναμη :

$$d\vec{F} = dq_i(\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}) \qquad (3\text{-}87)$$

Ἡ ἰσχύς πού προσφέρει ἡ $\vec{J}_i$ στό πεδίο, μέσα στόν ὄγκο dV ,εἶναι:

$$dN = -d\vec{F}\cdot\vec{u}_i \qquad (3\text{-}88)$$

ἤ

$$dN = -dq_i(\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B})\cdot\vec{u}_i = -\frac{dq_i}{dV}\,\vec{u}_i\cdot\vec{E}\,dV = -\rho_i\,\vec{u}_i\cdot\vec{E}\,dV \qquad (3\text{-}89)$$

ἤ ἀπό τήν (2-45)

$$dN = -\vec{J}_i\cdot\vec{E}\,dV \qquad (3\text{-}90)$$

'Υπολογίζουμε τήν ἔκφραση τοῦ $\vec{J}_i$ ἀπό τήν $1^η$ ἐξίσωση τοῦ Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

καί ἀπό τήν (3-86) :

$$\vec{J}_i = \vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{J}_r \qquad (3\text{-}91)$$

'Οπότε ἡ (3-90) γίνεται :

$$dN = \left[-\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon\, E^2\right) + \vec{E}\cdot\vec{J}_r \right] dV \qquad (3\text{-}92)$$

'Αλλά,γενικά,ἰσχύει :

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} \qquad (3\text{-}93)$$

ὁπότε:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H} \qquad (3\text{-}94)$$

καί

$$-\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) - \vec{H}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} \qquad (3\text{-}95)$$

καί ἐπειδή σύμφωνα μέ τή $2^η$ ἐξίσωση τοῦ Maxwell εἶναι :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (3\text{-}96)$$

ἔχουμε:

$$-\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (3\text{-}97)$$

ἤ

$$-E\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\,\mu^{-1}B^2\right) \qquad (3\text{-}98)$$

"Ωστε ἡ (3-92) γράφεται :

$$\boxed{dN = \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu^{-1}B^2\right) + \vec{E}\cdot\vec{J}_r + \vec{\nabla}(\vec{E}\times\vec{H})\right]dV} \qquad (3\text{-}99)$$

Ἡ φυσική σημασία τῶν ὅρων τῆς (3-99) εἶναι :

- Τό ἀριστερό μέλος τῆς (3-99) εἶναι ἡ στιγμιαία ἰσχύς πού παρέχουν οἱ πηγές στό πεδίο μέσα στόν ὄγκο dV.

- Τό ἄθροισμα $\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu^{-1}B^2$ παριστάνει τήν πυκνότητα τῆς ἀποθηκευμένης ἐνέργειας ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου καί ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ ἐκφράζει τό ρυθμό μεταβολῆς τῆς ἀποθηκευμένης ἠλεκτρομαγνητικῆς ἐνέργειας.

- Ὁ ὅρος $\vec{E}.\vec{J}_r$ ἐκφράζει τήν πυκνότητα ἰσχύος, πού ἀπορροφᾶ τό ρεῦμα ἀπόκρισης $\vec{J}_r$. Π.χ. ἄν τό ρεῦμα ἀπόκρισης διαρρέει ἕναν ἀγωγό, ἡ ἰσχύς αὐτή εἶναι ἡ θερμική ἰσχύς Joule, ἐνῶ ἄν τό ρεῦμα $\vec{J}_r$ ἀποτελεῖται ἀπό ἐλεύθερα φορτία ἡ ἰσχύς $\vec{E}.\vec{J}_r$ ἀντιπροσωπεύει αὔξηση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τῶν φορτίων, ἀνά μονάδα ὄγκου (αὔξηση τῆς θερμοκρασίας).

Λαβαίνοντας ὑπόψη τήν ἀρχή τῆς διατήρησης τῆς ἐνέργειας , βγάζουμε τό συμπέρασμα ὅτι ὁ ὅρος $\vec{\nabla}.(\vec{E}\times\vec{H})$ ἐκφράζει τήν ἰσχύ , πού ἐκρέει ἀπό τόν ὄγκο dV ὡς ἀκτινοβολία.

Ἡ (3-99) γράφεται μέ τή μορφή:

$$\boxed{\frac{dN}{dV} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon\, E^2 + \frac{1}{2}\,\mu^{-1}B^2\right) + \vec{E}\cdot\vec{J}_r + \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})} \qquad (3\text{-}100)$$

καί ἐκφράζει τήν ἰσότητα :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{πυκνότητα}\\ \text{ἰσχύος πού}\\ \text{προσφέρουν}\\ \text{οἱ πηγές } \vec{J}_i\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{ρυθμός αὔξη-}\\ \text{σης τῆς πυκ-}\\ \text{νότητας τῆς}\\ \text{ἀποθηκευμένης}\\ \text{ΗΜ ἐνέργειας}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{πυκνότητα}\\ \text{ἰσχύος}\\ \text{πού κατα-}\\ \text{ναλώνουν}\\ \text{τά ρεύμα-}\\ \text{τα ἀπόκρι}\\ \text{σης}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{πυκνότητα}\\ \text{τῆς στιγμι-}\\ \text{αίας ἀκτινο-}\\ \text{βολούμενης}\\ \text{ἰσχύος}\end{array}\right\} \qquad (3\text{-}101)$$

῾Ολοκληρώνοντας τήν (3-99) σέ ὄγκο V, πού περιορίζεται ἀπό κλειστή ἐπιφάνεια S , ἔχουμε :

$$N=\frac{d}{dt}\left[\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu^{-1}B^2\right)dV\right]+\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_r\,dV+\int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dV \quad (3\text{-}102)$$

Χρησιμοποιώντας τό θεώρημα τοῦ Gauss ἔχουμε τό λεγόμενο θεώρημα τοῦ Poynting:

$$\boxed{N=\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu^{-1}B^2\right)dV+\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}_r\,dV+\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}} \quad (3\text{-}103)$$

Δηλαδή :

$$\left\{\begin{matrix}\text{ὁλική ἰσχύς}\\ \text{πού προσφέ-}\\ \text{ρουν οἱ πη-}\\ \text{γές μέσα}\\ \text{στόν ὄγκο V}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{ρυθμός αὔ-}\\ \text{ξησης τῆς}\\ \text{ἀποθηκευ-}\\ \text{μένης ἐνέρ-}\\ \text{γειας στόν}\\ \text{ὄγκο V}\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}\text{ἰσχύς πού}\\ \text{καταναλώ-}\\ \text{νουν τά}\\ \text{ρεύματα}\\ \text{ἀπόκρισης}\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}\text{στιγμιαία}\\ \text{ἰσχύς πού}\\ \text{ἀκτινοβο-}\\ \text{λεῖται}\\ \text{ἀπό τόν}\\ \text{ὄγκο V μέ-}\\ \text{σω τῆς S}\end{matrix}\right\} \quad (3\text{-}104)$$

῞Οπως φαίνεται καί ἀπό τήν (3-103) μποροῦμε νά ὁρίσουμε τό διάνυσμα Poynting:

$$\vec{P}=\vec{E}\times\vec{H} \quad (3\text{-}105)$$

πού ἐκφράζει, κατά μέτρο, διεύθυνση καί φορά τή στιγμιαία ἰσχύ, πού ρέει ἀπό τή μονάδα ἐπιφάνειας μέ μορφή ἀκτινοβολίας. Δεδομένου ὅτι ἡ ἰσχύς αὐτή ἐξέρχεται μέ τή μορφή ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος, τό μέτρο P τοῦ $\vec{P}$ (ἰσχύς ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας) ἐκφράζει τήν " ἔνταση " τοῦ κύματος.

῞Ωστε ἡ στιγμιαία ἀκτινοβολούμενη ἰσχύς ἀπό ἕναν ὄγκο V πρός τά ἔξω εἶναι:

$$\boxed{N_{rad}=\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\,dV=\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}} \quad (3\text{-}106)$$

3.7.2. Περίπτωση Ἁρμονικῶν Πηγῶν καί Πεδίων.

Ὅταν οἱ πηγές καί τά πεδία εἶναι ἁρμονικά, τότε ἔχουμε :

$$\vec{P} = \vec{E}\times\vec{H} = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\, e^{j\omega t}\right]\times\ \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{H}}\, e^{j\omega t}\right]$$

ἤ (βλ. καί παρατήρηση τῆς παρ. 1.8) :

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^{*}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}\, e^{j2\omega t}\right)} \qquad (3\text{-}107)$$

Ἡ (3-107) δίνει τό (πραγματικό) διάνυσμα Poynting ἄν ξέρουμε τά φασικά διανύσματα $\vec{\mathcal{E}}$ καί $\vec{\mathcal{H}}$ τῶν πεδίων $\vec{E}$ καί $\vec{H}$.

Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ β΄ μέλους τῆς (3-107) εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τό χρόνο καί ἀποτελεῖ τή σ υ ν ε χ ή σ υ ν ι σ τ ῶ σ α $\bar{\vec{P}}$ (μέση χρονική τιμή) τοῦ διανύσματος Poynting :

$$\boxed{\bar{\vec{P}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^{*})} \qquad (3\text{-}108)$$

Ὁ ἄλλος ὅρος εἶναι ἡ ἐ ν α λ λ α σ σ ό μ ε ν η σ υ ν ι σ τ ῶ σ α τοῦ $\vec{P}$ (σέ συχνότητα 2ω) :

$$\boxed{\tilde{\vec{P}}(2\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}\, e^{j2\omega t}\right)} \qquad (3\text{-}109)$$

Ἀπό τήν (3-106) καί τήν

$$\vec{P} = \bar{\vec{P}} + \tilde{\vec{P}}(2\omega) \qquad (3\text{-}110)$$

ἔχουμε :

$$N_{rad} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\, dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot\bar{\vec{P}}\, dV + \int_V \vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{P}}\, dV = \oint_S \bar{\vec{P}}\cdot\hat{n}\, dS + \oint_S \tilde{\vec{P}}\cdot\hat{n}\, dS \qquad (3\text{-}111)$$

Ὥστε ἡ στιγμιαία ἀκτινοβολούμενη ἰσχύς εἶναι :

$$N_{rad} = \bar{N}_{rad} + \tilde{N}_{rad}(2\omega) \qquad (3\text{-}112)$$

ὅπου

$$\bar{N}_{rad} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\bar{\vec{P}}\, dV = \oint_S \bar{\vec{P}}\cdot\hat{n}\, ds \qquad (3\text{-}113)$$

καί

$$\tilde{N}_{rad} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{P}}\, dV = \oint_S \tilde{\vec{P}}\cdot\hat{n}\, ds \qquad (3\text{-}114)$$

Ὥστε ἕνα μέρος τῆς ἰσχύος (ἡ συνεχής συνιστώσα $\bar{N}_{rad}$) ἐκρέει συνεχῶς ἀπό τόν ὄγκο V, κατά τή διεύθυνση τοῦ $\bar{\vec{P}}$ σέ κάθε σημεῖο τῆς S, ἐνῶ ἕνα ἄλλο μέρος ($\tilde{N}_{rad}$) "παλινδρομεῖ" μέσα κι ἔξω ἀπό τόν V μέ κυκλική συχνότητα 2ω .

Συνεχή κι ἐναλλασσόμενη συνιστῶσα ἐμφανίζουν καί ἡ ἀποθηκευμένη ἠλεκτρομαγνητική ἐνέργεια, καθώς καί ἡ ἐνέργεια , πού ἀπορροφοῦν τά ρεύματα ἀπόκρισης.

Εὔκολα ἀποδείχνεται ὅτι :

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon\,\vec{E}\cdot\vec{E} = \frac{1}{4}\varepsilon\,(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{E}}^*) + \frac{1}{4}\varepsilon\,\mathrm{Re}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{E}}\,e^{j2\omega t}) \qquad (3\text{-}115)$$

καί

$$w_m = \frac{1}{2}\mu^{-1}\vec{B}\cdot\vec{B} = \frac{1}{4}\mu^{-1}(\vec{\mathcal{B}}\cdot\vec{\mathcal{B}}^*) + \frac{1}{4}\mu^{-1}\mathrm{Re}(\vec{\mathcal{B}}\cdot\vec{\mathcal{B}}\,e^{j2\omega t}) \qquad (3\text{-}116)$$

καί

$$\vec{E}\cdot\vec{J}_r = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{J}}_r^*) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{J}}_r\,e^{j2\omega t}) \qquad (3\text{-}117)$$

ὅπου w_e καί w_m ἡ πυκνότητα ἠλεκτρικῆς καί μαγνητικῆς ἐνέργειας καί $\vec{E}.\vec{J}_r$ ἡ πυκνότητα ἐνέργειας πού καταναλώνουν τά ρεύματα ἀπόκρισης.

Ἀπό τήν (3-117) συμπεραίνουμε ὅτι κατά μέσο ὅρο, χρονικά, οἱ πηγές παρέχουν ἰσχύ μόνο στή συνιστώσα ἐκείνη τῶν ρευμάτων ἀπόκρισης, πού εἶναι παράλληλη μέ τό ἠλεκτρικό πεδίο.

Ἀπό τά παραπάνω βγάζουμε τό συμπέρασμα ὅτι καί τό θεώρημα τοῦ Poynting (σχέση (3-103) θά γράφεται :

$$\boxed{N = \bar{N} + \tilde{N}(2\omega)} \qquad (3\text{-}118)$$

ὅπου

$$\bar{N} = \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{4}\left(\varepsilon\,\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{E}}^{*} + \mu^{-1}\vec{\mathcal{B}}\cdot\vec{\mathcal{B}}^{*}\right)dV + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_V \left(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{J}}_r^{*}\right)dV + \bar{N}_{rad} =$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_V \left(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{J}}_r^{*}\right)dV + \bar{N}_{rad}$$

ἤ

$$\boxed{\bar{N} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_V \left(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{J}}_r^{*}\right)dV + \bar{N}_{rad}} \qquad (3\text{-}119)$$

καί

$$\tilde{N} = \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{4}\left[\mathrm{Re}\left(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{E}}\;e^{j2\omega t}\right) + \mathrm{Re}\left(\vec{\mathcal{B}}\cdot\vec{\mathcal{B}}e^{j2\omega t}\right)\right]dV +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_V \left(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{\mathcal{J}}_r e^{j2\omega t}\right)dV + \tilde{N}_{rad} \qquad (3\text{-}120)$$

Γενικά οἱ τρεῖς προσθετέοι, πού προκύπτουν ἀπό τά ὁλοκληρώματα τῆς (3-120) δέν εἶναι σέ φάση .

Σέ πολλές,μάλιστα,πρακτικές περιπτώσεις γίνεται σκόπιμη άλληλο-εξουδετέρωσή τους. Μιλάμε,τότε,γιά π ρ ο σ α ρ μ ο γ ή τῆς πηγῆς, όπότε έχουμε καί τή μεγαλύτερη άπόδοση συνεχῶς άκτινοβο - λούμενης ίσχύος στό γύρω χῶρο .

3.7.3. Μιγαδική Ίσχύς - Μιγαδικό Διάνυσμα Poynting.

Όρίζοντας τό μέγεθος μ ι γ α δ ι κ ή ί σ χ ύ

$$\mathcal{N} = -\int_V \vec{\mathcal{J}}_i^* \cdot \vec{\mathcal{E}} \, dV \qquad (3\text{-}121)$$

πού προσφέρουν οί πηγές στό πεδίο μποροῦμε νά άποδείξουμε ότι τό μέγεθος $\bar{N}$ τῆς (3-119) είναι

$$\boxed{\bar{N} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \mathcal{N}} \qquad (3\text{-}122)$$

Όρίζοντας τό μ ι γ α δ ι κ ό δ ι ά ν υ σ μ α Poynting:

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^* \qquad (3\text{-}123)$$

έχουμε :

$$\boxed{\bar{\vec{P}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vec{\mathcal{P}}} \qquad (3\text{-}124)$$

καί

$$\bar{N}_{rad} = \oint_S \bar{\vec{P}} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{n} \, dS \qquad (3\text{-}125)$$

Όπότε ή συνεχής ίσχύς πού καταναλώνουν τά ρεύματα άπόκρισης εἶναι (σχέση (3-119),ίση μέ τή διαφορά τῶν $\bar{N}$ καί $\bar{N}_{rad}$, πού τίς παίρνουμε άπό τίς (3-122) καί (3-125).

Ώστε άπό τή μιγαδική ίσχύ $\mathcal{N}$ καί τό μιγαδικό διάνυσμα Poynting $\vec{\mathcal{P}}$ μποροῦμε νά ύπολογίσουμε τά ούσιώδη μεγέθη $\bar{N}$, $\bar{N}_{rad}$ καί $\bar{N}-\bar{N}_{rad}$.

3.8. Λύση τῶν μή Ὁμογενῶν Ἐξισώσεων.

3.8.1. Στατικά Δυναμικά.

α. Στατικό μονόμετρο δυναμικό.

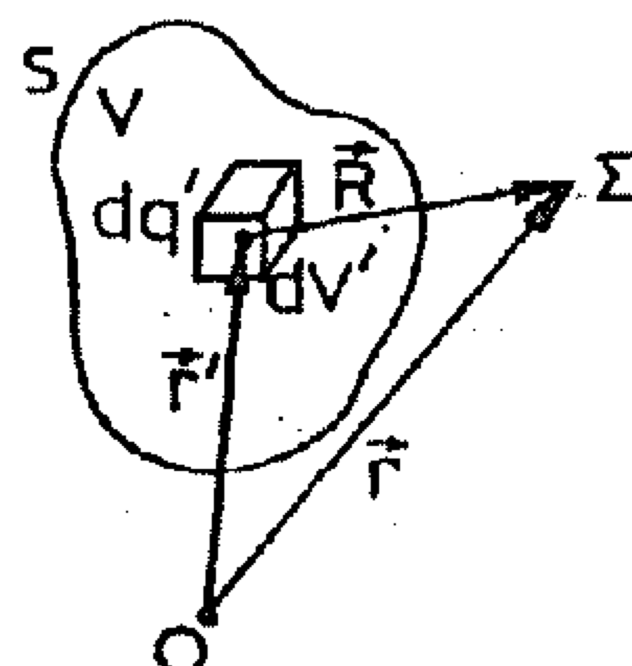
Ἀπό τή σχέση

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ὅταν τά πεδία καί τά δυναμικά δέν ἐξαρτωνται ἀπό τό χρόνο (ἠλεκτροστατική, μαγνητοστατική), ἔχουμε :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\Phi(\vec{r}) \qquad (3\text{-}126)$$

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά προσδιορίσουμε τό ἠλεκτρικό πεδίο στή θέση $\vec{r}$, πού δημιουργεῖ ἕνα σύστημα στατικῶν φορτίων (ἠλεκτροστατικό πεδίο).
Τό πεδίο αὐτό θά εἶναι ἐπαλληλία τῶν πεδίων, πού δημιουργοῦν τά φορτία, πού ὑπάρχουν σ' ὅλες τίς θέσεις $\vec{r}\,'$ τοῦ μελετώμενου χώρου.



Σχ. 3-4 Τό στατικό δυναμικό Φ στό σημεῖο Σ($\vec{r}$) εἶναι ἐπαλληλία τῶν δυναμικῶν, πού δημιουργοῦν ὅλα τά στοιχειώδη φορτία dq πού βρίσκονται στίς διάφορες θέσεις $\vec{r}\,'$ τοῦ χώρου .

Τό φορτίο

$$dq' = \rho(\vec{r}\,')\,dV' \qquad (3\text{-}127)$$

πού ὑπάρχει μέσα στό στοιχειώδη ὄγκο dV' δημιουργεῖ στή θέση $\vec{r}$ τό πεδίο Coulomb:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq'(\vec{r}-\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \frac{\rho(\vec{r}\,')\vec{R}}{4\pi\varepsilon\; R^3}\,dV'$$

ἤ

$$d\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{\vec{R}}{R^3}\right)$$

ἀλλά

$$-\frac{\vec{R}}{R^3} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)$$

ὥστε :

$$d\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\left(\frac{\rho(\vec{r}')\,dV'}{4\pi\varepsilon R}\right)$$

Ὥστε ἡ συμβολή ὅλων τῶν dq΄ στό πεδίο τῆς θέσης $\vec{r}$ δίνει :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')\,dV'}{4\pi\varepsilon R} \qquad (3\text{-}128)$$

Ἀπό τίς (3-126) καί (3-128) προκύπτει ὅτι:

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')\,dV'}{4\pi\varepsilon R}} \qquad (3\text{-}129)$$

β. Στατικό διανυσματικό δυναμικό.

Ἔστω μιά χωρική κατανομή χρονικά σταθερῆς πυκνότητας ρεύματος $\vec{J}(\vec{r}')$. Σέ κάθε θέση $\vec{r}'$, τότε, ὑπάρχει ἕνα ρεῦμα :

$$I\,d\vec{l}' = \frac{I}{S}\frac{d\vec{l}'}{dl'}dV' = \vec{J}(\vec{r}')\,dV' \qquad (3\text{-}130)$$

Τό μαγνητικό πεδίο, πού δημιουργεῖ στή θέση $\vec{r}$, τό στοιχειῶδες αὐτό ρεῦμα, εἶναι, σύμφωνα μέ τό νόμο τῶν Biot-Savart:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\vec{J}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\mu^{-1}|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'$$

ἤ

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\vec{J}(\vec{r}')\times\vec{R}}{4\pi\mu^{-1}R^3}dV' \qquad (3\text{-}131)$$

'Ολοκληρώνοντας γιά ὅλα τά $\vec{J}(\vec{r}')$ ἔχουμε:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{4\pi\mu^{-1} R^3} dV'} \qquad (3\text{-}132)$$

ἤ $$\vec{B}(\vec{r}) = -\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{4\pi\mu^{-1}} \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) dV' = \int_V \frac{1}{4\pi\mu^{-1}} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) \times \vec{J}(\vec{r}') dV' \qquad (3\text{-}133)$$

Γενικά, ἄν $\vec{C}$ ἕνα διανυσματικό καί λ ἕνα μονόμετρο πεδίο ἰσχύει:

$$\vec{\nabla} \times \lambda \vec{C} = \vec{\nabla}\lambda \times \vec{C} + \lambda \vec{\nabla} \times \vec{C} \qquad (3\text{-}134)$$

'Εφαρμόζοντας τήν (3-134) στήν (3-133) ἔχουμε :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{R} \vec{J}(\vec{r}')\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) \times \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{R} \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') \qquad (3\text{-}135)$$

'Αλλά

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') = 0 \qquad (3\text{-}136)$$

γιατί τό $\vec{J}(\vec{r}')$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό $\vec{r}$. 'Επομένως

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) \times \vec{J}(\vec{r}') \qquad (3\text{-}137)$$

Ὥστε:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\mu^{-1}} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' = \vec{\nabla} \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{4\pi\mu^{-1} R} dV' \qquad (3\text{-}138)$$

'Από τόν ὁρισμό τοῦ διανυσματικοῦ δυναμικοῦ $\vec{A}$:

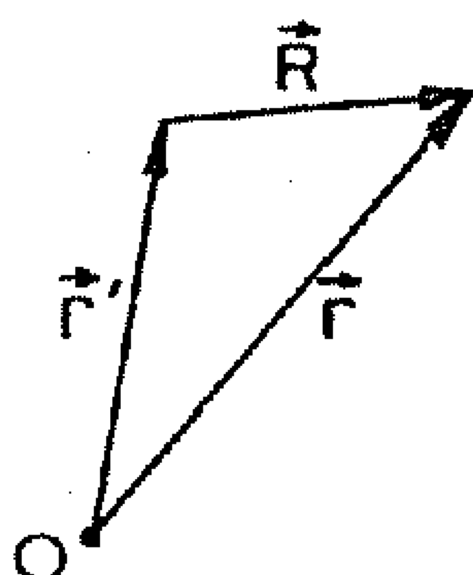
$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \qquad (3\text{-}139)$$

καί ἀπό τήν (3-138) προκύπτει ὅτι :

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{4\pi\mu^{-1}R}\,dV'} \qquad (3\text{-}140)$$

Εἶναι φανερή ἡ ἀναλογία τῶν σχέσεων (3-129) καί (3-140), πού συνδέουν τά δυναμικά $\Phi(\vec{r})$ καί $\vec{A}(\vec{r})$ μέ τίς πηγές τους $\rho(\vec{r}\,')$ καί $\vec{J}(\vec{r}\,')$, πού στήν περίπτωση πού ἐξετάζουμε εἶναι "στατικές", δηλαδή συναρτήσεις μόνο τοῦ χώρου .

3.8.2. Χρονικά Μεταβαλλόμενα Δυναμικά - Καθυστερημένα Δυναμικά (Retarded Potentials).



Σχ.3-5 Στό σημεῖο $\vec{r}$ καί τή χρονική στιγμή t τά πεδία, ἤ τά δυναμικά, ἔχουν τιμή, πού εἶναι ἐπαλληλία τῶν τιμῶν πού εἶχαν τά πεδία ἤ τά δυναμικά, σ'ὅλες τίς θέσεις $\vec{r}\,'$ πρίν ἀπό χρόνο R/υ ἤ καθεμιά.

Στή γενική περίπτωση, πού τά μεγέθη ρ καί $\vec{J}$ εἶναι καί συναρτήσεις τοῦ χρόνου t, τότε καί τά δυναμικά Φ καί $\vec{A}$ εἶναι κι αὐτά συναρτήσεις τοῦ t , τό ἴδιο καί τά πεδία $\vec{E}$ καί $\vec{B}$, καί ἱκανοποιοῦν τή γενική διαφορική ἐξίσωση κύματος, πού διαδίδεται στό χῶρο μέ ταχύτητα

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad (3\text{-}141)$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι ἄν συμβεῖ μιά μεταβολή, στίς πηγές ἤ στά πεδία ἤ στά δυναμικά, στή θέση $\vec{r}\,'$, ἡ μεταβολή αὐτή " γίνεται αἰσθητή " στή θέση $\vec{r}$ ὕστερα ἀπό χρόνο R/υ . Ὥστε τό δυναμικό $\Phi(\vec{r},t)$ στή θέση $\vec{r}$ καί τή χρονική στιγμή t προσδιορίζεται ἀπό τή διάταξη, πού εἶχαν στίς διάφορες θέσεις $\vec{r}\,'$, τά φορτία πρίν ἀπό χρόνους R/υ δηλ. τίς χρονικές στιγμές $t - \frac{R}{\upsilon}$.

Μέ βάση τήν (3-129) θά έχουμε λοιπόν :

$$\Phi(\vec{r},t)=\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}',t-\frac{R}{\upsilon}\right)}{4\pi\varepsilon\ R}dV' \qquad (3\text{-}142)$$

Μέ ἀνάλογο συλλογισμό θά ἔχουμε καί γιά τό διανυσματικό δυναμικό :

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int_V \frac{\vec{J}\left(\vec{r}',t-\frac{R}{\upsilon}\right)}{4\pi\mu^{-1} R}dV' \qquad (3\text{-}143)$$

Οἱ σχέσεις (3-142), (3-143) δίνουν, ὅπως λέμε, τά καθυστερημένα δυναμικά καί ἀποτελοῦν τίς γενικές λύσεις τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῶν δυναμικῶν, στήν περίπτωση πού δέν ὑπάρχουν ὁριακές ἐπιφάνειες πού νά ἐπιβάλλουν ὁρισμένες συνθῆκες . Ἀπό αὐτές,καί μέ τίς σχέσεις

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad (3\text{-}144)$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (3\text{-}145)$$

προσδιορίζονται τά πεδία $\vec{E}(\vec{r},t)$ καί $\vec{B}(\vec{r},t)$

Περίπτωση ἁρμονικῶν πηγῶν. Ὅταν οἱ πηγές εἶναι ἁρμονικές χρησιμοποιώντας τή φασική ἔκφρασή τους (phasors), ἔχουμε :

$$\rho(\vec{r}',t)=\mathrm{Re}\left[\rho(\vec{r}')e^{j\omega t}\right] \qquad (3\text{-}146)$$

$$\vec{J}(\vec{r}',t)=\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}')e^{j\omega t}\right] \qquad (3\text{-}147)$$

Ἐπιπλέον εἶναι:

$$\frac{\omega}{\upsilon}=k \qquad (3\text{-}148)$$

Τά καθυστερημένα δυναμικά, τώρα, σύμφωνα μέ τίς (3-142),(3-143) εἶναι:

ὅπου
$$\Phi(\vec{r},t) = Re\int_V \frac{\rho(\vec{r}')e^{j(\omega t-kR)}}{4\pi\varepsilon R}dV' \qquad (3\text{-}149)$$

καί
$$\vec{A}(\vec{r},t) = Re\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')e^{j(\omega t-kR)}}{4\pi\mu^{-1}R}dV' \qquad (3\text{-}150)$$

Ἄν $\Phi(\vec{r})$ καί $\vec{A}(\vec{r})$ οἱ phasors τῶν δυναμικῶν, ἀπό τίς (3 - 149), (3-150) προκύπτει ὅτι :

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')\,e^{-jkR}}{4\pi\varepsilon R}\,dV'$$
$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')\,e^{-jkR}}{4\pi\mu^{-1}R}\,dV' \qquad (3\text{-}151)$$

Οἱ (3-151) ἐκφράζουν τούς phasors τῶν καθυστερημένων δυναμικῶν σέ συνάρτηση μέ τούς phasors τῶν πηγῶν τους.

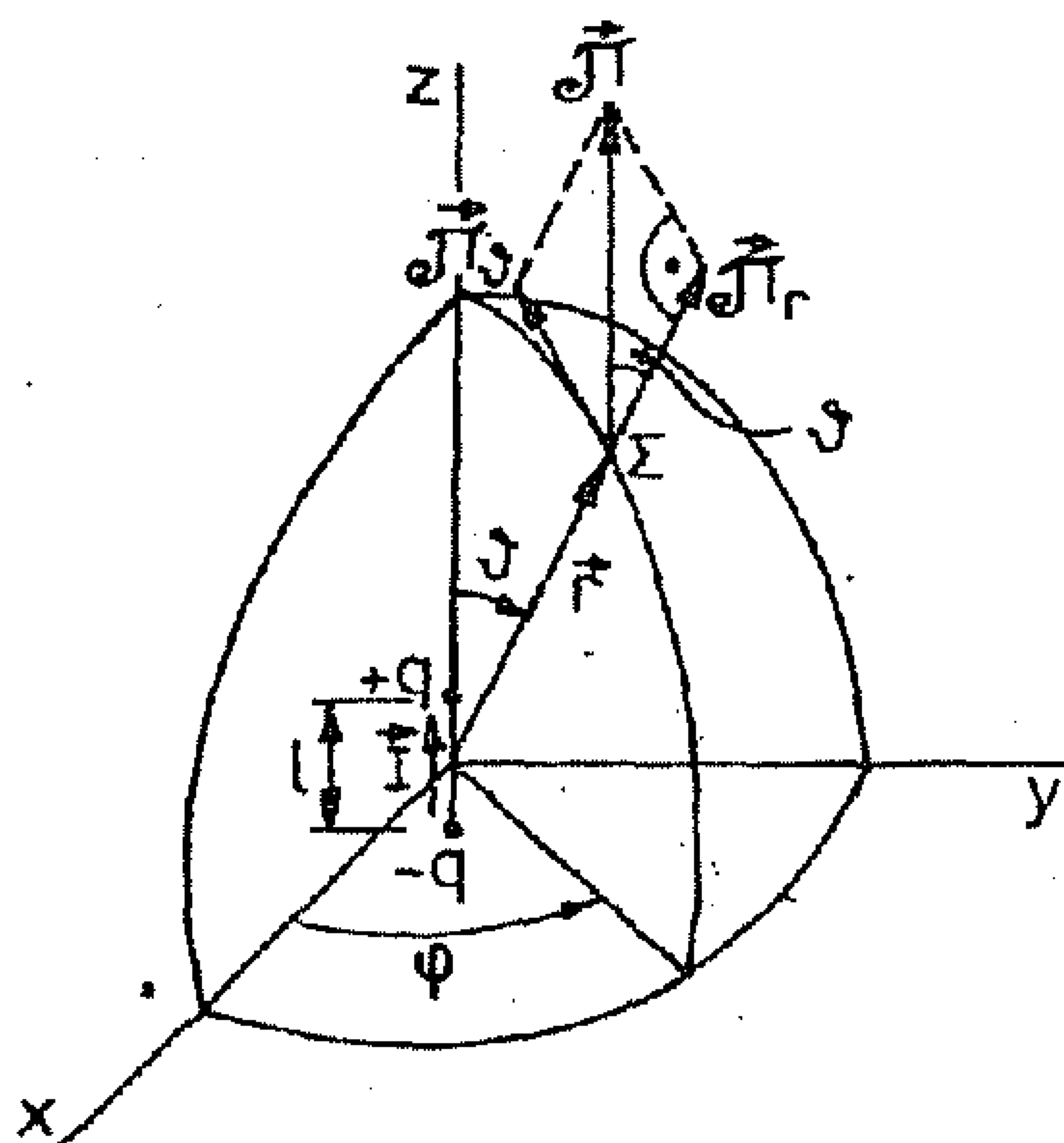
3.9. Ἀκτινοβολία Στοιχειώδους Ἠλεκτρικοῦ Διπόλου.

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα στοιχειῶδες ἠλεκτρικό δίπολο (βλ.σχ 3-6) μέσα σέ ὁμογενές καί ἰσότροπο μέσο. Ὑποθέτουμε ὅτι τό δίπολο ἀποτελεῖται ἀπό τά φορτία +q , -q , πού ἀναπτύσσονται στά ἄκρα ἑνός πολύ μικροῦ ἀγωγοῦ μήκους l, ὁ ὁποῖος ἐπιτρέπει τή δημιουργία ρεύματος

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (3\text{-}152)$$

Ὥστε στήν τυχαία χρονική στιγμή t τό φορτίο στά ἄκρα τοῦ διπόλου εἶναι γενικά :

$$q = q(t) \qquad (3\text{-}153)$$



Σχ. 3-6. Γεωμετρία γιά τή μελέτη τῆς ἀκτινοβολίας ἑνός στοιχειώδους ἠλεκτρικοῦ διπόλου.

Ἡ ἠλεκτρική ροπή τοῦ διπόλου εἶναι:

$$\vec{p}(t) = q(t)\vec{l}$$

καί ὁ ρυθμός μεταβολῆς της ὁρίζει τό διάνυσμα :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dq}{dt}\vec{l} = I\vec{l} = \vec{I}\,l \qquad (3\text{-}154)$$

(ἔχουμε θεωρήσει ὡς φορά τοῦ ρεύματος τή φορά τοῦ $\vec{l}$ δηλ. ἀπό τό $-q$ πρός τό $+q$).

Τό διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(\vec{r},t)$ στή θέση $\vec{r}$ καί τή χρονική στιγμή t (σχέση (3-143)) , εἶναι:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_V \frac{\vec{J}\left(\vec{r}',t-\frac{R}{\upsilon}\right)}{4\pi\mu^{-1}R}dV' \qquad (3\text{-}155)$$

Ἐπειδή τό στοιχειῶδες δίπολο εἶναι πρακτικά σημειακό ($l \to 0$) ἔχουμε $\vec{r}' = 0$ καί $R = |\vec{r}-\vec{r}'| = r$. Ὥστε ἡ (3-155) γίνεται :

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_V \frac{\vec{J}\left(t-\frac{r}{\upsilon}\right)}{4\pi\mu^{-1}r}dV' \qquad (3\text{-}156)$$

Ἀλλά :

$$\vec{J}dV' = I\,d\vec{z}' = \vec{I}\,dz' \qquad (3\text{-}157)$$

καί ἡ (3-156) γράφεται :

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \int_0^l \frac{\vec{I}\left(t-\frac{r}{\upsilon}\right)}{4\pi\mu^{-1}r}dz' = \frac{\vec{I}\left(t-\frac{r}{\upsilon}\right)l}{4\pi\mu^{-1}r} \qquad (3\text{-}158)$$

καί ἀπό τή (3-154) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{M}\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right)}{4\pi\mu^{-1} r}} \qquad (3\text{-}159)$$

Ὥστε τό δυναμικό $\vec{A}(\vec{r},t)$ στή θέση $\vec{r}$ καί τή χρονική στιγμή t καθορίζεται ἀπό τό ρυθμό μεταβολῆς $\vec{M}$ τῆς διπολικῆς ροπῆς κατά τή χρονική στιγμή $t - \frac{r}{\upsilon}$ (ὅπου $\frac{r}{\upsilon}$ εἶναι ὁ χρόνος, πού χρειάζεται ἡ διαταραχή γιά νά φτάσει στή θέση $\vec{r}$) καί ἐξαρτᾶται ἀντίστροφα ἀνάλογα ἀπό τήν ἀπόσταση r .

Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἡ μεταβολή εἶναι ἁρμονική .
Δηλαδή ἡ (3-153) εἶναι :

$$q = Re(\mathfrak{q}\, e^{j\omega t}) \qquad (3\text{-}160)$$

ὅπου $\mathfrak{q}$ ὁ phasor τοῦ φορτίου. Ὁ Phasor $\vec{\mathcal{I}}$ τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος εἶναι :

$$\vec{\mathcal{I}} = j\omega\, \mathfrak{q}\, \hat{z} \qquad (3\text{-}161)$$

ἐνῶ ὁ phasor $\vec{\mathcal{M}}$ τοῦ ρυθμοῦ μεταβολῆς τῆς ἠλεκτρικῆς ροπῆς εἶναι

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{I}}\, l = j\omega\, \mathfrak{q}\, l\, \hat{z}} \qquad (3\text{-}162)$$

Ἀπό τή (3-159) ἔχουμε :

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r})\, e^{j\omega t} = \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right)}}{4\pi\mu^{-1} r} \qquad (3\text{-}163)$$

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r})\, e^{j\omega t} = \frac{\vec{\mathcal{M}}\, e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi\mu^{-1} r} \qquad (3\text{-}164)$$

καί

$$\mathcal{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{\mathcal{M}}}{4\pi\mu^{-1}} \frac{e^{-jkr}}{r} \qquad (3\text{-}165)$$

θέτουμε :

$$\vec{\Pi} = \vec{\mathcal{M}} \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \qquad (3\text{-}166)$$

Ὥστε :

$$\vec{\mathcal{A}} = \mu \vec{\Pi} \qquad (3\text{-}167)$$

καί

$$\vec{\mathcal{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}} = \mu \, \vec{\nabla} \times \vec{\Pi} \qquad (3\text{-}168)$$

Ἀπό τήν πρώτη ἐξίσωση τοῦ Maxwell ἔχουμε (θεωρώντας σ=0) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{B}} = j\omega\varepsilon\mu \vec{\mathcal{E}} \qquad (3\text{-}169)$$

καί

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{j}{\omega\varepsilon\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{B}} \qquad (3\text{-}170)$$

Θά χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες ὅπου:

$$h_1 = 1$$

$$h_2 = r$$

$$h_3 = r \sin\vartheta$$

Οἱ συνιστῶσες τοῦ $\vec{\Pi}$ εἶναι :

$$\Pi_r = \Pi \cos\vartheta$$

$$\Pi_\vartheta = -\Pi \sin\vartheta \qquad (3\text{-}171)$$

$$\Pi_\varphi = 0$$

Ἐφαρμόζοντας τήν (3-168) ἔχουμε :

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu}{r^2 \sin\vartheta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\vartheta} & r\sin\vartheta\,\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \mathcal{T}_r & r\mathcal{T}_\vartheta & 0 \end{vmatrix} \qquad (3\text{-}172)$$

'Αναπτύσσοντας τή (3-172) ἔχουμε :

$$\mathcal{B}_r = \frac{\mu}{r^2 \sin\vartheta}\left(-r\,\frac{\partial \mathcal{T}_\vartheta}{\partial \varphi}\right) = \frac{-\mu}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\mathcal{M}\,\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\sin\vartheta\right) = 0$$

$$\mathcal{B}_\vartheta = \frac{\mu}{r^2 \sin\vartheta}\left(r\,\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial \varphi}\right) = \frac{\mu}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\mathcal{M}\,\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\cos\vartheta\right) = 0$$

$$\mathcal{B}_\varphi = \frac{\mu}{r^2 \sin\vartheta}\left[r\sin\vartheta\left(\frac{\partial (r\mathcal{T}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial \vartheta}\right)\right] =$$

$$= \frac{\mu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\sin\vartheta\;\mathcal{M}\,\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos\vartheta\;\mathcal{M}\,\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right)\right] =$$

$$= \frac{\mu}{r}\left[jk\sin\vartheta\,\frac{\mathcal{M}}{4\pi}\,e^{-jkr} + \sin\vartheta\;\mathcal{M}\,\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right]$$

ἤ τελικά :

$$\mathcal{B}_\varphi = \frac{\mathcal{M}}{4\pi\mu^{-1}}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\cdot e^{-jkr} \qquad (3\text{-}173)$$

'Από τή (3-170) ἔχουμε :

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{j}{\omega\varepsilon\mu r^2 \sin\vartheta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\vartheta} & r\sin\vartheta\,\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r\sin\vartheta\,\mathcal{B}_\varphi \end{vmatrix} \qquad (3\text{-}174)$$

'Αναπτύσσοντας τή (3-174) βρίσκουμε :

$$\mathcal{E}_r = \frac{\mathcal{M}}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\upsilon r^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-jkr} \tag{3-175}$$

$$\mathcal{E}_\vartheta = \frac{\mathcal{M}}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{jk^2}{\omega r} + \frac{1}{\upsilon r^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \tag{3-176}$$

καί $\mathcal{E}_\varphi = 0$ (3-177)

Πολλάπλασιάζοντας ἐπί $e^{j\omega t}$, καί παίρνοντας τά πραγματικά μέρη ἔχουμε τίς συνιστῶσες τοῦ πραγματικοῦ πεδίου $\vec{E}$, $\vec{B}$.

Συνοψίζοντας ἔχουμε :

$$\mathcal{E}_r(\vec{r},t) = \frac{\mathcal{M}}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\upsilon r^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)\cos\vartheta\; e^{j(\omega t-kr)}$$

$$\mathcal{E}_\vartheta(\vec{r},t) = \frac{\mathcal{M}}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{jk^2}{\omega r} + \frac{1}{\upsilon r^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)\sin\vartheta\; e^{j(\omega t-kr)}$$

$$\mathcal{E}_\varphi(\vec{r},t) = 0$$

$$\mathcal{B}_r(\vec{r},t) = 0 \tag{3-178}$$

$$\mathcal{B}_\vartheta(\vec{r},t) = 0$$

$$\mathcal{B}_\varphi(\vec{r},t) = \frac{\mathcal{M}}{4\pi\mu^{-1}}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\; e^{j(\omega t-kr)}$$

ὅπου : $\mathcal{M} = I\, l$

Συμπεράσματα

• Ὁ παράγοντας $e^{j(\omega t - kr)}$, σ' ὅλες τίς συνιστῶσες τοῦ πεδίου, δείχνει ὅτι ἡ ἠλεκτρομαγνητική διαταραχή γύρω ἀπό ἕνα στοιχειῶδες ἠλεκτρικό δίπολο ἔχει τή μορφή σφαιρικοῦ κύματος, πού διαδίδεται μέ ταχύτητα $\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Τό πλάτος τοῦ κύματος, φθίνει ὅσο μεγαλώνει τά r , ἀλλά μέ διαφορετικό ρυθμό γιά τίς διάφορες συνιστῶσες .

• Ὅλοι οἱ ὅροι πού ἐξαρτῶνται ἀπό τό $\frac{1}{r^2}$ καί ἀπό τό $\frac{1}{r^3}$ ἐξασθενοῦν πολύ γρήγορα ὅσο ἀπομακρυνόμαστε ἀπό τό δίπολο. Ἔτσι, ἐνῶ σέ κοντινές ἀποστάσεις ἐπικρατεῖ τό πεδίο (3-178) , πού λέγεται καί " πεδίο ἐπαγωγῆς " , σέ μακρινές ἀποστάσεις ἐπικρατοῦν μόνο οἱ ὅροι, πού ἐξαρτῶνται ἀπό τό $\frac{1}{r}$ καί συνιστοῦν τό λεγόμενο " πεδίο ἀκτινοβολίας " . Ὥστε τό πεδίο ἀκτινοβολίας ἐκφράζεται ἀπό τίς σχέσεις :

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_\varphi = \mathcal{B}_r = \mathcal{B}_\vartheta = 0$$

$$\mathcal{E}_\vartheta = \frac{jk^2\mathcal{M}}{4\pi\varepsilon\omega r}\sin\vartheta\, e^{j(\omega t - kr)} \qquad (3\text{-}179)$$

$$\mathcal{B}_\varphi = \frac{jk\mathcal{M}}{4\pi\mu^{-1}r}\sin\vartheta\, e^{j(\omega t - kr)}$$

Στήν περίπτωση τοῦ κενοῦ , ὅπου :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3\cdot 10^8 \text{ m/sec}$$

$$\varepsilon_o = 8{,}854 \; 10^{-12} F/m$$

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$$

οἱ (3-179) γίνονται :

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_\varphi = \mathcal{B}_r = \mathcal{B}_\vartheta = 0$$

$$\mathcal{E}_\vartheta = \frac{j60\pi \, \mathcal{I} l}{\lambda r} \sin\vartheta \, e^{j(\omega t - kr)} \qquad (3\text{-}180)$$

$$\mathcal{B}_\varphi = \frac{j \mathcal{I} l}{2\lambda r \mu_0^{-1}} \sin\vartheta \, e^{j(\omega t - kr)}$$

ὅπου $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}$ τό μῆκος κύματος τῆς ἀκτινοβολίας.

Τό πηλίκο τῶν συνιστωσῶν E_ϑ , H_φ τῆς ἀκτινοβολίας εἶναι:

$$Z = \frac{E_\vartheta}{H_\varphi} = \frac{\mu E_\vartheta}{B_\varphi} = \frac{k}{\varepsilon\omega} = \frac{1}{\upsilon\varepsilon} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (3\text{-}181)$$

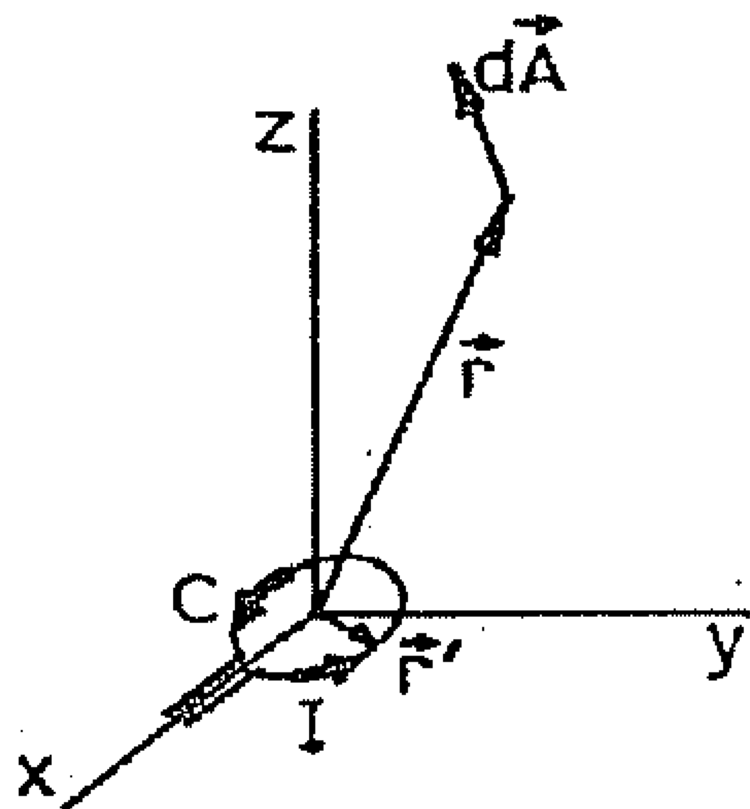
ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό μέσο, καί λέγεται " κυματική ἀντίσταση" ἤ "ἐσωτερική ἀντίσταση" τοῦ μέσου.

Εὔκολα προκύπτει ὅτι γιά τό κενό εἶναι:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \;\; \Omega = 377\,\Omega \qquad (3\text{-}182)$$

3.10. Ἀκτινοβολία Στοιχειώδους Μαγνητικοῦ Διπόλου.

Ἔστω τό στοιχειῶδες μαγνητικό δίπολο τοῦ σχ. 3-7 (μικρός κυκλικός βρόχος μέ ἀκτίνα α), πού διαρρέεται ἀπό ρεῦμα $I(\vec{r}\,',t)$.



Σχ.3-7 Γεωμετρία γιά τή μελέτη τῆς ἀκτινοβολίας ἑνός μαγνητικοῦ διπόλου.

Στή θέση $\vec{r}$ καί τή χρονική στιγμή t τό στοιχεῖο $\vec{dl}\,'$ τοῦ βρόχου δημιουργεῖ καθυστερημένο διανυσματικό δυναμικό :

$$d\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\mu^{-1}} \frac{\vec{J}\left(\vec{r}\,',t-\frac{R}{\upsilon}\right)}{R} dV' \qquad (3\text{-}183)$$

ἤ ἐπειδή

$$\vec{J}\,dV' = I\,\vec{dl}' = I\alpha\,d\varphi'\hat{\varphi}' \qquad (3\text{-}184)$$

εἶναι:

$$d\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{I\left(\vec{r}\,',t-\frac{R}{\upsilon}\right)}{4\pi\mu^{-1}R}\,\alpha\,d\varphi'\hat{\varphi}' \qquad (3\text{-}185)$$

ὅπου $\quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' \quad$ καί $\quad R = |\vec{r} - \vec{r}\,'| \qquad (3\text{-}186)$

Ἐξετάζουμε στά παρακάτω τήν περίπτωση πού

$$r \gg \alpha \qquad (3\text{-}187)$$

ὁπότε εἶναι :

$$I\left(\vec{r}\,',t-\frac{R}{\upsilon}\right) = I\left(t-\frac{R}{\upsilon}\right) \qquad (3\text{-}188)$$

καί

$$d\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\alpha\,I\left(t-\frac{R}{\upsilon}\right)}{4\pi\mu^{-1}R}\,d\varphi'\hat{\varphi}' \qquad (3\text{-}189)$$

Ἔστω, τώρα, ὅτι τό ρεῦμα εἶναι ἁρμονική συνάρτηση τοῦ χρόνου, δηλαδή

$$I = Re(\mathcal{I} e^{j\omega t}) \tag{3-190}$$

τότε

$$d\vec{A}(\vec{r}) = Re\left[\frac{\alpha \mathcal{I} e^{j\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}}{4\pi\mu^{-1}R} d\varphi' \hat{\varphi}' \right] \tag{3-191}$$

ἤ

$$d\vec{A}(\vec{r}) = Re\left[\frac{\alpha \mathcal{I} e^{-jkR}}{4\pi\mu^{-1}R} d\varphi' \hat{\varphi}' e^{j\omega t} \right] \tag{3-192}$$

Ἀπό τή (3-192) ἔχουμε τό φασικό διανυσματικό δυναμικό :

$$d\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\alpha \mathcal{I} e^{-jkR}}{4\pi\mu^{-1}R} d\varphi' \hat{\varphi}' \tag{3-193}$$

πού δημιουργεῖ τό στοιχεῖο $d\vec{l}'$ τοῦ βρόχου στή θέση $\vec{r}$ $(r \gg \alpha)$

Θά ὑπολογίσουμε στή περίπτωση αὐτή τό πηλίκο $\frac{e^{-jkR}}{R}$:
Μέ τήν ὑπόθεση, ὅτι $r \gg \alpha$ εἶναι

$$\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} \ll 1 \tag{3-194}$$

καί

$$R = \sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'} \simeq \sqrt{r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'} =$$

$$= r\left(1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)^{1/2} \simeq r\left(1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right) \tag{3-195}$$

ἑπομένως :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)^{1/2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right) \tag{3-196}$$

καί $$e^{-jkR} \simeq e^{-jkr} e^{jk\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}} \simeq e^{-jkr}\left[1+\frac{jk}{r}(\vec{r}\cdot\vec{r}')\right] \qquad (3-197)$$

καί $$\frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{e^{-jkr}}{r}\left[1+\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)(\vec{r}\cdot\vec{r}')+jk\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^3}\right] \qquad (3-198)$$

ἤ τελικά:

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \simeq \frac{e^{-jkr}}{r}\left[1+\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)(\vec{r}\cdot\vec{r}')\right] \qquad (3-199)$$

Ἡ (3-193) μέ τήν (3-199) δίνουν :

$$d_o\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\alpha I\, e^{-jkr}}{4\pi\mu^{-1}r}\left[1+\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)(\vec{r}\cdot\vec{r}')\right]d\varphi'\hat{\varphi}' \qquad (3-200)$$

Θά ὁλοκληρώσουμε τήν (3-200) σ' ὅλο τό βρόχο C . Χρησιμοποιώντας τίς σχέσεις :

$$\hat{\varphi}' = -\sin\varphi'\hat{x} + \cos\varphi'\hat{y} \qquad (3-201)$$

$$\vec{r}\cdot\vec{r}' = x\,x' + y\,y' = \alpha x\cos\varphi' + \alpha\, y\sin\varphi' \qquad (3-202)$$

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi = r\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi = r\sin\vartheta\,\sin\varphi \end{aligned} \qquad (3-203)$$

καί $$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y} \qquad (3-204)$$

εὔκολα ἀποδείχνουμε ὅτι:

$$\oint_C \hat{\varphi}' d\varphi' = 0 \qquad (3-205)$$

καί $$\oint_C (\vec{r}\cdot\vec{r}')\hat{\varphi}' d\varphi' = \pi\alpha\, r\sin\vartheta\,\hat{\varphi} \qquad (3-206)$$

ὅπου C ὁ κυκλικός βρόχος.

Ὥστε ἡ ὁλοκλήρωση τῆς (3-200) σ' ὅλο τό βρόχο δίνει:

$$\mathcal{A}(\vec{r}) = \frac{\pi\alpha^2 \mathcal{I} e^{-jkr}}{4\pi\mu^{-1}} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta \, \hat{\varphi} \qquad (3\text{-}207)$$

ἀλλά

$$\vec{m}_o = \mathcal{I}\pi\alpha^2 \hat{z} = m_o \hat{z} \qquad (3\text{-}208)$$

εἶναι ὁ phasor τῆς μαγνητικῆς ροπῆς τοῦ διπόλου.
Ὥστε :

$$\mathcal{A}(\vec{r}) = \frac{m_o e^{-jkr}}{4\pi\mu^{-1}} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta \, \hat{\varphi} \qquad (3\text{-}209)$$

Ἐπειδή δέν ὑπάρχει συσσώρευση φορτίου τό μονόμετρο δυναμικό στή θέση $\vec{r}$ εἶναι μηδέν καί

$$\vec{\mathcal{E}} = -j\omega \mathcal{A} \qquad (3\text{-}210)$$

ἤ

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{j\omega m_o}{4\pi\mu^{-1}} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\vartheta \, e^{-jkr} \hat{\varphi} \qquad (3\text{-}211)$$

Ὥστε τό $\vec{\mathcal{E}}$ ἔχει μόνο φ-συνιστώσα.
Εἶναι :

$$\vec{\mathcal{B}} = \vec{\nabla} \times \mathcal{A} \qquad (3\text{-}212)$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\vartheta} & r\sin\vartheta \, \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r\sin\vartheta \mathcal{A}_\varphi \end{vmatrix} \qquad (3\text{-}213)$$

Ἀπό τή (3-213) προκύπτει :

$$\mathcal{B}_r = \frac{m_0}{2\pi\mu^{-1}}\left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-jkr} =$$

$$= \frac{j\omega m_0}{2\pi\mu^{-1}}\left(\frac{1}{ur^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-jkr} \tag{3-214}$$

'Από τήν $$\vec{m} = Re\left[\vec{m}_0 e^{j\omega t}\right] \tag{3-215}$$

Προκύπτει ὅτι : $$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dt} = Re\left[j\omega \vec{m}_0 e^{j\omega t}\right] \tag{3-216}$$

Τό διάνυσμα $$\vec{\mathcal{M}} = j\omega\, \vec{m}_0 \tag{3-217}$$

εἶναι ὁ phasor τοῦ ρυθμοῦ μεταβολῆς τῆς μαγνητικῆς ροπῆς τοῦ διπόλου. Ὥστε ἡ (3-214) γράφεται :

$$\mathcal{B}_r = \frac{\mathcal{M}}{2\pi\mu^{-1}}\left(\frac{1}{ur^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)\cos\vartheta\, e^{-jkr} \tag{3-218}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ (3-218) εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογη μέ τήν (3-175)
'Ανάλογα ἀπό τήν (3-213) βρίσκουμε :

$$\mathcal{B}_\vartheta = \frac{\mathcal{M}}{4\pi\mu^{-1}}\left(\frac{jk^2}{\omega r} + \frac{1}{ur^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)\sin\vartheta\, e^{-jkr} \tag{3-219}$$

'Η (3-219) εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογη πρός τή (3-176)
Τέλος ἀπό τή (3-213) ἔχουμε :

$$B_\varphi = 0 \tag{3-220}$$

Πολλαπλασιάζοντας τίς συνιστῶσες ἐπί $e^{j\omega t}$ καί παίρνοντας τά πραγματικά μέρη ἔχουμε τίς συνιστῶσες τοῦ πραγματικοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου .

Συνοψίζοντας έχουμε :

$$\mathcal{E}_r(\vec{r},t) = 0$$

$$\mathcal{E}_\vartheta(\vec{r},t) = 0$$

$$\mathcal{E}_\varphi(\vec{r},t) = -\frac{\mathcal{M}}{4\pi\mu^{-1}}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta\, e^{j(\omega t - kr)}$$

$$\mathcal{B}_r(\vec{r},t) = \frac{\mathcal{M}}{2\pi\mu^{-1}}\left(\frac{1}{\upsilon r^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)\cos\vartheta\, e^{j(\omega t - kr)} \qquad (3.221)$$

$$\mathcal{B}_\vartheta(\vec{r},t) = \frac{\mathcal{M}}{4\pi\mu^{-1}}\left(\frac{jk^2}{\omega r} + \frac{1}{\upsilon r^2} + \frac{1}{j\omega r^3}\right)\sin\vartheta\, e^{j(\omega t - kr)}$$

$$\mathcal{B}_\varphi = 0$$

όπου $\mathcal{M} = j\omega I\pi\alpha^2$

Οἱ (3-221) εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογες πρός τίς (3-178) τοῦ ἠλεκτρικοῦ διπόλου, μέ μόνη τή διαφορά ὅτι οἱ ρόλοι τῶν $\vec{\mathcal{E}}$ καί $\vec{\mathcal{B}}$ ἔχουν ἐναλλαγεῖ.

Καί στήν περίπτωση αὐτή τό πεδίο ἀκτινοβολίας ἀποτελεῖται μόνο ἀπό τούς ὅρους πού περιέχουν τό $\frac{1}{r}$ ἐνῶ οἱ ὅροι τῶν $\frac{1}{r^2}$ καί $\frac{1}{r^3}$ παραλείπονται . Δηλαδή :

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_\vartheta = \mathcal{B}_r = \mathcal{B}_\varphi = 0$$

$$\mathcal{E}_\varphi = -\frac{jk\mathcal{M}}{4\pi\mu^{-1}r}\sin\vartheta\, e^{j(\omega t - kr)} \qquad (3\text{-}222)$$

$$\mathcal{B}_\vartheta = \frac{jk^2\mathcal{M}}{4\pi\mu^{-1}\omega r}\sin\vartheta\, e^{j(\omega t - kr)}$$

Καί πάλι τό πηλίκο :

$$Z = \frac{E_\varphi}{H_\vartheta} = \frac{\mu E_\varphi}{B_\vartheta} = \frac{\omega}{k\mu^{-1}} = \frac{\cancel{2\pi}\upsilon\mu}{\lambda\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{\lambda}}} = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

εἶναι ἴσο μέ τήν κυματική ἀντίσταση τοῦ μέσου.

4. ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Όταν λύνουμε τίς ήλεκτρομαγνητικές διαφορικές έξισώσεις σέ χώρους, πού περιορίζονται μέ όριακές έπιφάνειες, στίς όποΐες γίνεται άπότομη άλλαγή τῶν ίδιοτήτων τοῦ ύλικοῦ μέσου (ε, μ, σ), πρέπει νά έχουμε ύπόψη όρισμένες συνθῆκες (όριακές συνθῆκες), τίς όποΐες πρέπει νά ίκανοποιοῦν πάνω στίς όριακές έπιφάνειες τά πεδία $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ καί $\vec{H}$.

4.1. Κάθετες συνιστῶσες τῶν $\vec{D}, \vec{E}, \vec{H}$ καί $\vec{B}$.

Όλοκληρώνοντας τή 3η έξίσωση τοῦ Maxwell :

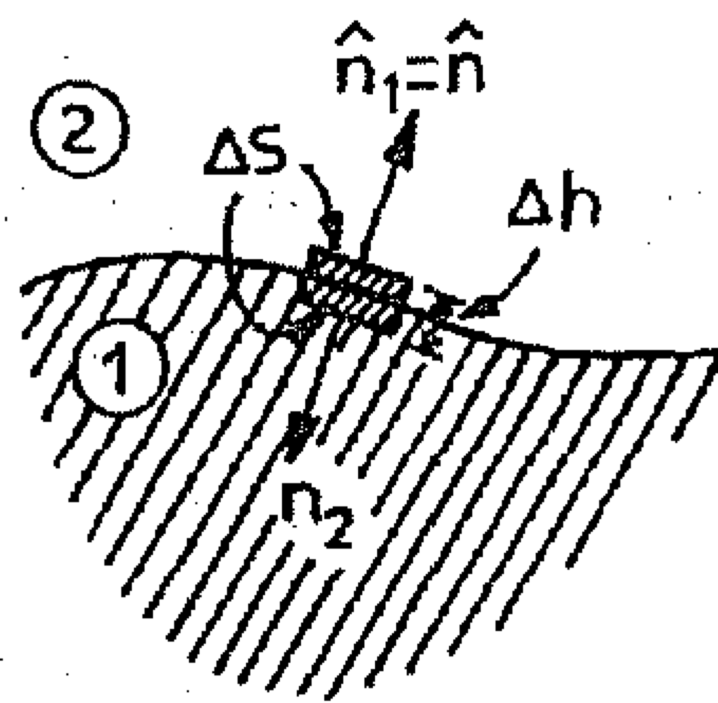
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \qquad (4\text{-}1)$$

στό στοιχειώδη όγκο ένός όρθοῦ πρίσματος (βλ.σχ. 4-1) :

$$\nabla V = \Delta S \cdot \Delta h \qquad (4\text{-}2)$$

έχουμε :

$$\int_{\Delta V} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}\, dV = \int_{\Delta V} \rho\, dV \qquad (4\text{-}3)$$



Σχ.4-1 Γιά τήν άπόδειξη τῆς άσυνέχειας τῆς κάθετης συνιστώσας τῆς ήλεκτρικῆς διέγερσης, σέ μιά όριακή έπιφάνεια.

Έφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ Gauss γράφουμε :

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n}\, dS = \Delta Q \qquad (4\text{-}4)$$

όπου ΔQ τό συνολικό φορτίο, πού περιέχει ό όγκος ΔV καί S ή συνολική όριακή έπιφάνεια πού περιορίζει τόν όγκο ΔV.
Θεωρώντας ότι $\Delta h \rightarrow 0$ γράφουμε τή (4-4) έτσι :

$$\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_2\, \Delta S + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_1\, \Delta S = \Delta Q \qquad (4\text{-}5)$$

῎Αν λάβουμε ὑπόψη ὅτι :

$$\hat{n} = \hat{n}_1 = -\hat{n}_2 \qquad (4\text{-}6)$$

ἡ (4-5) γράφεται :

$$\vec{D}_2\cdot\hat{n} - \vec{D}_1\cdot\hat{n} = \frac{\Delta Q}{\Delta S} \qquad (4\text{-}7)$$

῎Αν πάρουμε καί $\Delta S \to 0$ τότε τό ὅριο τοῦ δεξιοῦ μέλους γίνεται :

$$\lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_s \qquad (4\text{-}8)$$

ὅπου ρ_S ἡ λεγόμενη " ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου" στό σημεῖο ἐκεῖνο τῆς ἐπιφάνειας . Δηλαδή:

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \qquad (4\text{-}9)$$

῞Ωστε, ὅταν διασχίζουμε μιά ὁριακή ἐπιφάνεια ἀπό τό μέσο(1) πρός τό μέσο (2) συναντοῦμε ἀσυνέχεια στήν κάθετη συνιστῶσα τῆς ἠλεκτρικῆς διέγερσης $\vec{D}$, ἴση μέ τήν ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου ρ_S στό σημεῖο ἐκεῖνο τῆς ἐπιφάνειας. Στήν ἐφαρμογή τῆς (4-9) τό $\hat{n}$ τό παίρνουμε μέ κατεύθυνση ἀπό τό μέσο (1) πρός τό μέσο (2). ᾿Από τή σχέση

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad (4\text{-}10)$$

καί τή (4-9) προκύπτει :

$$\hat{n}\cdot(\varepsilon_2\vec{E}_2 - \varepsilon_1\vec{E}_1) = \rho_s \qquad (4\text{-}11)$$

Μέ ἀνάλογη ἐργασία, ξεκινώντας ἀπό τήν τέταρτη ἐξίσωση τοῦ Maxwell , ἔχουμε :

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \qquad (4\text{-}12)$$

καί ἀπό αὐτήν :

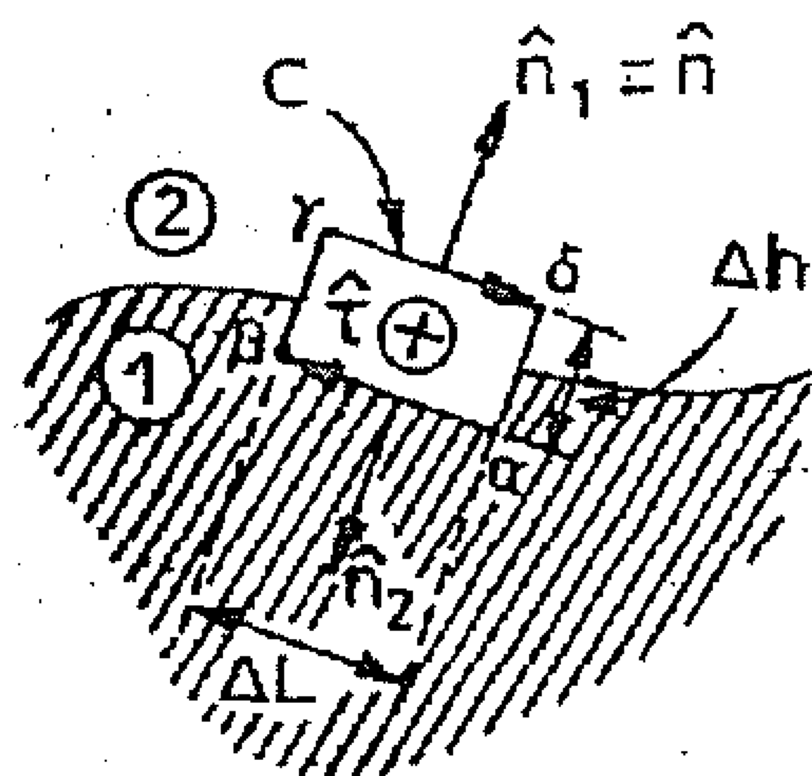
$$\hat{n}\cdot(\mu_2\vec{H}_2 - \mu_1\vec{H}_1) = 0 \qquad (4\text{-}13)$$

Ὥστε, οἱ κάθετες συνιστῶσες τοῦ $\vec{B}$ ἐμφανίζουν συνέχεια ὅταν διασχίζουμε τήν ὁριακή ἐπιφάνεια ἀπό τό (1) στό (2), ἐνῶ οἱ κάθετες συνιστῶσες τοῦ $\vec{H}$ ἐμφανίζουν ἀσυνέχεια, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τίς μαγνητικές διαπερατότητες τῶν δύο πλευρῶν.

4.2. Ἐφαπτομενικές συνιστῶσες τῶν $\vec{H}, \vec{B}, \vec{E}$ καί $\vec{D}$

Θεωροῦμε στό ἐπίπεδο τοῦ χαρτιοῦ τό ὀρθογώνιο C μέ βάση ΔL καί ὕψος $\Delta h \to 0$. Ἀπό τήν 1η ἐξίσωση τοῦ Maxwell ἔχουμε:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (4\text{-}14)$$



Σχ. 4-2 Γιά τήν ἀπόδειξη τῆς ἀσυνέχειας τῆς ἐφαπτόμενης συνιστώσας τῆς μαγνητικῆς διέγερσης $\vec{H}$.

Ὁλοκληρώνοντας τή σχέση αὐτή πάνω στήν ἐπιφάνεια $\Delta S = \Delta L \Delta h$ ἔχουμε:

$$\int_{\Delta S} (\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\hat{\tau}\, dS = \int_{\Delta S} \vec{J}\cdot\hat{\tau}\, dS + \int_{\Delta S} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot\hat{\tau}\, dS \qquad (4\text{-}15)$$

ὅπου $\hat{\tau}$ τό κάθετο μοναδιαῖο διάνυσμα πάνω στήν ΔS.
Μέ τό Θεώρημα τοῦ Stokes, ὅταν ἐπιπλέον $\Delta h \to 0$, ἡ (4-15) γίνεται:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_\alpha^\beta \vec{H}_1\cdot d\vec{l}_1 + \int_\gamma^\delta \vec{H}_2\cdot d\vec{l}_2 = \vec{J}\cdot\hat{\tau}\,\Delta S + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot\hat{\tau}\,\Delta S \qquad (4\text{-}16)$$

Ἀλλά εἶναι:

$$d\vec{l}_1 = dl\ \hat{n}\times\hat{\tau} \qquad (4\text{-}17)$$

$$d\vec{l}_2 = -dl\ \hat{n}\times\hat{\tau} \qquad (4\text{-}18)$$

Ὥστε :

$$\vec{H}_1\cdot(\hat{n}\times\hat{\tau})\Delta L-\vec{H}_2\cdot(\hat{n}\times\hat{\tau})\Delta L=\vec{J}\cdot\hat{\tau}\,\Delta S+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\hat{\tau}\,\Delta S$$

ή
$$(\vec{H}_1-\vec{H}_2)\cdot(\hat{n}\times\hat{\tau})=\vec{J}\cdot\hat{\tau}\,\frac{\Delta S}{\Delta L}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\hat{\tau}\,\frac{\Delta S}{\Delta L}\qquad(4\text{-}19)$$

'Υπάρχει, όμως, περίπτωση τό παρακάτω όριο νά μή μηδενίζεται,ἀλλά νά έχουμε:

$$\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\vec{J}\Delta S}{\Delta L}=\lim_{\Delta h\to 0}\vec{J}\cdot\Delta h=\vec{J}_S\qquad(4\text{-}20)$$

όπου $\vec{J}_S$ ή λεγόμενη "έπιφανειακή πυκνότητα ρεύματος" (δηλ.$\vec{J}\to\infty$, όταν $\Delta h\to 0$), ένῶ πάντοτε

$$\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta L}=0\qquad(4\text{-}21)$$

γιατί τό $\partial\vec{D}/\partial t$ παραμένει πεπερασμένο. Ὥστε :

$$(\vec{H}_1-\vec{H}_2)\cdot(\hat{n}\times\hat{\tau})=\vec{J}_S\cdot\hat{\tau}\qquad(4\text{-}22)$$

'Αλλά άπό τή διανυσματική ταυτότητα:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}=\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$$

ή (4-22) γίνεται:

$$\hat{\tau}\cdot(\vec{H}_1-\vec{H}_2)\times\hat{n}=\vec{J}_S\cdot\hat{\tau}\qquad(4\text{-}23)$$

ή
$$\hat{\tau}\cdot\left[(\vec{H}_1-\vec{H}_2)\times\hat{n}-\vec{J}_S\right]=0\qquad(4\text{-}24)$$

Τό $\hat{\tau}$ όμως είναι ένα αὐθαίρετο έφαπτομενικό διάνυσμα τῆς όριακῆς έπιφάνειας. Γι αὐτό άπό τήν (4-24) προκύπτει:

$$\hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{J}_S\qquad(4\text{-}25)$$

"Αν $\vec{H}_n$ καί $\vec{H}_t$ είναι ή κάθετη συνιστῶσα καί ή έφαπτομενική συνιστῶσα τοῦ $\vec{H}$, θά είναι :

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{1n} + \vec{H}_{1t} \qquad (4\text{-}26)$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_{2n} + \vec{H}_{2t} \qquad (4\text{-}27)$$

ἀλλά

$$\vec{H}_{1n} = (\hat{n}\cdot\vec{H}_1)\,\hat{n} \qquad (4\text{-}28)$$

$$\vec{H}_{2n} = (\hat{n}\cdot\vec{H}_2)\,\hat{n} \qquad (4\text{-}29)$$

καί

$$\vec{H}_{1t} = \vec{H}_1 - \vec{H}_{1n} \qquad (4\text{-}30)$$

$$\vec{H}_{2t} = \vec{H}_2 - \vec{H}_{2n} \qquad (4\text{-}31)$$

πολλαπλασιάζοντας ἀπό ἀριστερά τά μέλη τῆς (4-25) ἐξωτερικά ἐπί $\hat{n}$ καί χρησιμοποιώντας τήν ταυτότητα :

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{C}$$

ἔχουμε :

$$\hat{n}\times[\hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)] = [\hat{n}\cdot(\vec{H}_2-\vec{H}_1)]\,\hat{n} - (\hat{n}\cdot\hat{n})\,(\vec{H}_2-\vec{H}_1) = \hat{n}\times\vec{J}_S$$

ἤ $$(\hat{n}\cdot\vec{H}_1)\hat{n} - (\hat{n}\cdot\vec{H}_2)\hat{n} + \vec{H}_2 - \vec{H}_1 = -\hat{n}\times\vec{J}_S = \vec{J}_S\times\hat{n}$$

ἤ $$(\vec{H}_2-\vec{H}_{2n}) - (\vec{H}_1-\vec{H}_{1n}) = \vec{J}_S\times\hat{n}$$

καί τελικά :

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{J}_S\times\hat{n} \qquad (4\text{-}32)$$

Ἡ (4-32) εἶναι ἄλλη ἔκφραση τῆς (4-25) . Τό διάνυσμα $\vec{J}_S\times\hat{n}$ ἔχει μέτρο J_S καί διεύθυνση κάθετη στά $\hat{n}$ καί $\vec{J}_S$. Ἀπό τήν (4-32) φαίνεται ἡ ἀσυνέχεια τῆς ἐφαπτομενικῆς συνιστώσας τῆς μαγνητικῆς διέγερσης $\vec{H}$ ὅταν ὑπάρχει ἐπιφανειακή πυκνότητα ρεύματος ($\vec{J}_S \neq 0$).

Μέ ἀνάλογη ἐργασία, ξεκινώντας ἀπό τή $2^{\underline{\eta}}$ ἐξίσωση τοῦ Maxwell καταλήγουμε στήν :

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \qquad (4\text{-}33)$$

ἤ

$$\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = 0 \qquad (4\text{-}34)$$

Ὥστε, ἡ ἐφαπτομενική συνιστώσα τοῦ πεδίου $\vec{E}$ ἐμφανίζει πάντοτε συνέχεια κατά τή μετάβαση ἀπό τό μέσο (1) στό μέσο (2)

Ἀπό τήν $\vec{H} = \mu^{-1}\vec{B}$

ἡ (4-25) δίνει:

$$\hat{n} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} \right) = \vec{J}_S \qquad (4\text{-}35)$$

καί ἡ (4-32)

$$\frac{\vec{B}_{2t}}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_{1t}}{\mu_1} = \vec{J}_S \times \hat{n} \qquad (4\text{-}36)$$

Ἀπό τήν $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

ἡ (4-33) γίνεται:

$$\hat{n} \times \left(\frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2} - \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} \right) = 0 \qquad (4\text{-}37)$$

ἤ ἀλλιῶς :

$$\frac{\vec{D}_{2t}}{\varepsilon_2} - \frac{\vec{D}_{1t}}{\varepsilon_1} = 0 \qquad (4\text{-}38)$$

4.3. Εἰδικές Περιπτώσεις.

4.3.1. Ὁριακές συνθῆκες στήν ἐπιφάνεια μεταξύ δύο καλῶν διηλεκτρικῶν.

Στίς ὁριακές ἐπιφάνειες μεταξύ δύο καλῶν διηλεκτρικῶν εἶναι $\rho_S = 0$ καί $\vec{J}_S = 0$. Ἑπομένως οἱ βασικές σχέσεις(4-9),(4-14) (4-25) καί (4-33) γίνονται :

$$\left.\begin{array}{l} \hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=0 \\ \hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \\ \hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0 \quad \text{ἤ} \quad \vec{H}_{2t}-\vec{H}_{1t}=0 \\ \hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \quad \text{ἤ} \quad \vec{E}_{2t}-\vec{E}_{1t}=0 \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}39)$$

Στίς σχέσεις (4-39) πρέπει νά προστεθοῦν καί οἱ σχέσεις πού θά προκύψουν ἀπό τίς (4-39) καί τίς :

$$\vec{H}=\mu^{-1}\vec{B} \qquad \text{καί} \qquad \vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

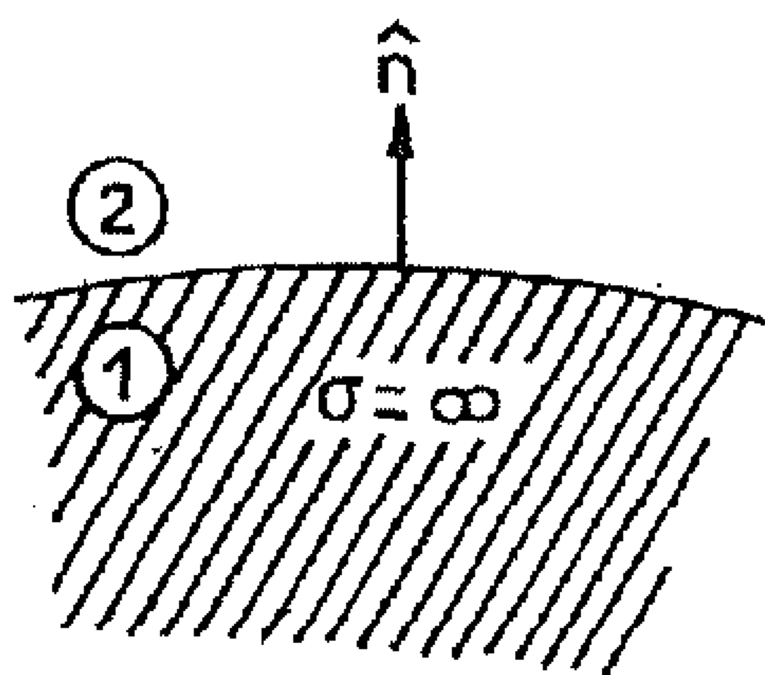
Ὥστε, στήν περίπτωση αὐτή ἐμφανίζουν συνέχεια οἱ κάθετες συνιστῶσες τῶν $\vec{D}$ καί $\vec{B}$ καί οἱ ἐφαπτομενικές τῶν $\vec{H}$ καί $\vec{E}$.

4.3.2. Ὁριακές συνθῆκες στήν ἐπιφάνεια τέλειων ἀγωγῶν.

Στήν ἠλεκτροστατική περίπτωση (ΗΣ) γενικά, σ' ἕναν τέλειο ἀγωγό ($\sigma=\infty$), εἶναι :

$$\rho_S\neq 0 \;,\; \vec{J}_S=0 \;,\; \vec{E}_1=0 \;,\; \vec{D}_1=0 \;,\; \vec{B}_1\neq 0 \;,\; \vec{H}_1\neq 0 \qquad (4\text{-}40)$$

γιατί τό $\vec{B}_1$ δέν σχετίζεται κατ' ἀνάγκη μέ τό $\vec{E}_1$,ὅπως στή δυναμική περίπτωση . Ἔτσι ἐνῶ τό $\vec{E}_1$ μηδενίζεται μέσα σ' ἕναν ἀγωγό, γιατί ἀναγκάζει τά φορτία ἀγωγιμότητας νά κινηθοῦν ἔτσιὥστε νά τό ἐξουδετερώσουν, τό $\vec{B}_1$ δέν ἐξασκεῖ πάνω τους καμιά δύναμη, ἀφοῦ ἡ ταχύτητά τους εἶναι μηδέν,κι ἔτσι δέν ἀναγκάζει τά ἐλεύθερα στατικά φορτία νά διαγράφουν κυκλικές τροχιές,ὥστε νά τό ἐξουδετερώσουν.



Σχ.4-3 Γιά τίς ὁριακές συνθῆκες στήν ἐπιφάνεια ἀγωγοῦ.

Ὥστε,στήν ἠλεκτροστατική περίπτωση οἱ ὁριακές συνθῆκες γιά ἕναν καλό ἀγωγό εἶναι :

$$\left.\begin{aligned} \vec{D}_2\cdot\hat{n} &= \rho_S \\ \vec{B}_2\cdot\hat{n} &= \vec{B}_1\cdot\hat{n} \\ \hat{n}\times\vec{H}_2 &= \hat{n}\times\vec{H}_1 \\ \hat{n}\times\vec{E}_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}41)$$

Στήν ἠ λ ε κ τ ρ ο δ υ ν α μ ι κ ή π ε ρ ί π τ ω σ η (ΗΔ) μέσα στόν τέλειο ἀγωγό εἶναι:

$$\vec{E}_1 = 0 \quad , \ \vec{B}_1 = 0 \quad , \ \vec{D}_1 = 0 \quad , \ \vec{H}_1 = 0 \qquad (4\text{-}42)$$

ἐνῶ στήν ἐπιφάνειά του:

$$\rho_S \neq 0 \qquad \vec{J}_S \neq 0 \qquad (4\text{-}43)$$

Στήν περίπτωση αὐτή οἱ ὁριακές συνθῆκες γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} \vec{D}_2\cdot\hat{n} &= \rho_S \\ \vec{B}_2\cdot\hat{n} &= 0 \\ \hat{n}\times\vec{H}_2 &= \vec{J}_S \\ \hat{n}\times\vec{E}_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}44)$$

Οἱ συνθῆκες (4-44), πού ἰσχύουν γιά τέλειους ἀγωγούς, ἐφαρμόζονται καί στούς πραγματικούς ἀγωγούς ὅταν ἡ συχνότητα εἶναι πολύ ὑψηλή, ὁπότε τό βάθος διεισδύσεως $x_o=\sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}$ εἶναι πάρα πολύ μικρό(π.χ. γιά τό χαλκό καί ὅταν f=1 GH_z εἶναι $x_o = 2.10^{-3}$ mm).

4.4. Συνοπτικός Πίνακας Ὁριακῶν Συνθηκῶν.

ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ *)	ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΟΡΙΑΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΔΥΟ ΜΕΣΩΝ	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΕΛΕΙΩΝ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ	ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΟΥ ΤΟ ΜΕΣΟ (1) ΕΙΝΑΙ ΤΕΛΕΙΟΣ ΑΓΩΓΟΣ
ΚΑΘΕΤΗ	$\hat n\cdot(\vec D_2-\vec D_1)=\rho_s$	$\hat n\cdot(\vec D_2-\vec D_1)=0$	$\hat n\cdot\vec D_2=\rho_s$
	$\hat n\cdot(\vec B_2-\vec B_1)=0$	$\hat n\cdot(\vec B_2-\vec B_1)=0$	$\hat n\cdot(\vec B_2-\vec B_1)=0$ (ΗΣ) $\hat n\cdot\vec B_2=0$ (ΗΔ)
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΙΚΗ	$\hat n\times(\vec H_2-\vec H_1)=\vec J_s$ ἤ $\vec H_{2t}-\vec H_{1t}=\vec J_s\times\hat n$	$\hat n\times(\vec H_2-\vec H_1)=0$ ἤ $\vec H_{2t}-\vec H_{1t}=0$	$\hat n\times(\vec H_2-\vec H_1)=0$ (ΗΣ) $\vec H_{2t}-\vec H_{1t}=0$ (ΗΣ) καί $\hat n\times\vec H_2=\vec J_s$ (ΗΔ) $\vec H_{2t}=\vec J_s\times\hat n$ (ΗΔ)
	$\hat n\times(\vec E_2-\vec E_1)=0$ ἤ $\vec E_{2t}-\vec E_{1t}=0$	$\hat n\times(\vec E_2-\vec E_1)=0$ ἤ $\vec E_{2t}-\vec E_{1t}=0$	$\hat n\times\vec E_2=0$ ἤ $\vec E_{2t}=0$

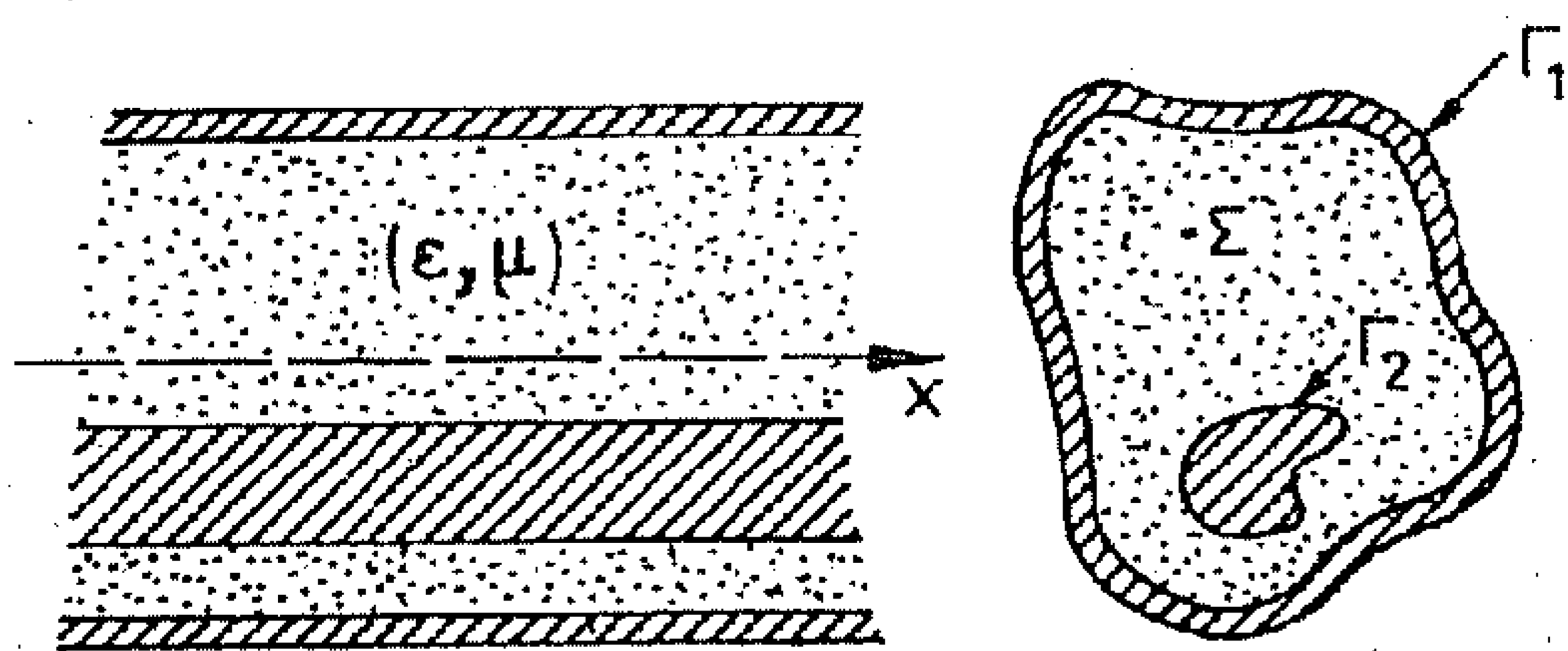
*) Στόν πίνακα περιλαμβάνονται οἱ συνθῆκες, πού ἀπομνημονεύονται εὔκολα .Οἱ ὑπόλοιπες προκύπτουν ἀπό αὐτές ἄν χρησιμοποιηθοῦν οἱ σχέσεις $\vec D=\varepsilon\vec E$ καί $\vec H=\mu^{-1}\vec B$.

5. ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ

5.1. Εἰσαγωγή.

Οἱ κυματοδηγοί εἶναι φυσικά συστήματα, πού τά χρησιμοποιοῦμε στήν πράξη σάν φορεῖς "καθοδηγημένης" διάδοσης ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων. Ἐδῶ ὑποθέτουμε ὅτι τό σύστημα εἶναι "εὐθύγραμμο" δηλ. ὅτι ὁρίζεται ἀπό μιά ἐπιφάνεια (ἤ καί πολλές) ὁποιασδήποτε μορφῆς, πού ἡ μιά της διάσταση, ὅμως, θεωρεῖται ἀπεριόριστη ("ἄξονας" τοῦ κυματοδηγοῦ).

Ἀνάμεσα στά διάφορα τέτοια φυσικά συστήματα (γραμμές μεταφορᾶς, ὁμοαξονικές ἤ διπλές, κυματοδηγοί μεταλλικοῦ σωλήνα, διηλεκτρικοί κυματοδηγοί, κυματοδηγοί πλακῶν) ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν κυρίως οἱ ὁμοαξονικές γραμμές καί οἱ κοῖλοι κυματοδηγοί μέ μεταλλικά τοιχώματα.



Σχ. 5-1 Ὁ κυματοδηγός εἶναι σύστημα πού καθοδηγεῖ τή διάδοση τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων. Οἱ ἐπιφάνειες Γ_1, Γ_2, εἶναι ἀγώγιμες ἐνῶ ὁ χῶρος ἀναμεσά τους εἶναι γεμᾶτος μέ ἰσότροπο καί ὁμογενές διηλεκτρικό ὑλικό. Ἡ διάδοση γίνεται κατά τόν ἄξονα x .

Σέ ὅλες τίς περιπτώσεις τό ὑλικό, πού περιορίζουν οἱ χαρακτηριστικές ἐπιφάνειες Γ_1 , Γ_2 , .. τοῦ κυματοδηγοῦ, θεωρεῖται ἰσότροπο καί ὁμογενές (ε,μ). Κάθε φορά, ἀνάλογα μέ τή γεωμετρική μορφή τῶν ἐπιφανειῶν Γ, μεταχειριζόμαστε καί τό κατάλληλο σύστη-

μα συντεταγμένων γιά τή μελέτη τοῦ κυματοδηγοῦ.
Στό ἑξῆς θά φανταζόμαστε μονοχρωματικά ἁρμονικά κύματα (ω).

Συνήθως ἀναλύουμε τά πεδία $\vec{E}$ καί $\vec{H}$, σέ κάθε σημεῖο Σ μέσα στόν κυματοδηγό, σέ μιά συνιστώσα κατά τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα x καί σέ μιά συνιστώσα κάθετη πάνω στήν προηγούμενη (μέ δείκτη T ἀπό τή λέξη transverse-ἐγκάρσιος) δηλαδή:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_T \qquad , \qquad \vec{H} = \vec{H}_x + \vec{H}_T \qquad (5\text{-}1)$$

Μέ βάση τήν ἀνάλυση αὐτή μποροῦμε ἀπό πρίν νά ταξινομήσουμε τίς διάφορες δυνατές λύσεις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell μέσα στόν κυματοδηγό σέ τρεῖς κύριες κατηγορίες (πού τίς λέμε " κυματικούς τύπους " ἤ " ρυθμούς διάδοσης " -transmission modes) :

<u>Κυματικός τύπος TM (transverse magnetic) ἤ τύπος (E).</u> Στόν τύπο αὐτό ὑπάρχει μόνο ἡ ἐγκάρσια μαγνητική συνιστώσα $\vec{H}_T$, δηλαδή :

$$\vec{H}_x = 0 \qquad \text{καί} \qquad \vec{E}_x \neq 0 \qquad (5\text{-}2)$$

<u>Κυματικός τύπος TE (transverse electric) ἤ τύπος (H) ὅταν :</u>

$$\vec{E}_x = 0 \qquad \text{καί} \qquad \vec{H}_x \neq 0 \qquad (5\text{-}3)$$

<u>Κυματικός τύπος TEM (transverse electromagnetic) ὅταν :</u>

$$\vec{E}_x = 0 \qquad \text{καί} \qquad \vec{H}_x = 0 \qquad (5\text{-}4)$$

Μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ τρεῖς παραπάνω κυματικοί τύποι παρουσιάζονται σέ κυματοδηγούς μέ πολλαπλές ἐπιφάνειες Γ, ἐνῶ σέ κοίλους κυματοδηγούς ἐμφανίζονται μόνο οἱ δύο πρῶτοι τύποι (E) καί (H) .

Ὅταν τά τοιχώματα τῶν κυματοδηγῶν δέν εἶναι ἀρκετά καλοί ἀγωγοί, τότε ἐκτός ἀπό τούς τύπους TM, TE καί TEM μποροῦν νά ἐμ-

φανιστοῦν καί σύμπλοκοι "ὑβριδικοί κυματικοί τύποι" (E-H) .

Χάρη στή γραμμικότητα τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell τά κύματα , πού διαδίδονται μέσα στόν κυματοδηγό μποροῦν νά εἶναι ὁποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός κυματικῶν τύπων TEM, E καί H.
Στήν πράξη, ὅμως, ἐπιδιώκουμε νά εὐνοήσουμε τήν κυματοδήγηση ἑνός μόνο κυματικοῦ τύπου (ὥστε νά ἐλέγχουμε τήν " προσαρμογή " στίς τροφοδοτήσεις συστημάτων ἀκτινοβολίας καί λήψης καί τό γενικότερο χειρισμό τοῦ κύματος). Τά παραπάνω τά πετυχαίνουμε διεγείροντας κατάλληλα τόν κυματοδηγό καί διαλέγοντας κατάλληλα τίς διαστάσεις καί τή μορφή του.

Μιά ἄλλη συνέπεια τῆς γραμμικότητας τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell εἶναι, ὅπως διαπιστώσαμε στά προηγούμενα,ὅτι ἡ διάδοση κατά τόν ἄξονα +x μπορεῖ νά περιγραφεῖ, γιά ἕναν ὁρισμένο κυματικό τύπο, μέ ἕναν ἐκθετικό "χωρικό" παράγοντα

$$e^{-\gamma x}$$

κοινό γιά ὅλες τίς συνιστῶσες τῶν πεδίων. Ἡ σταθερά γ εἶναι ἡ σταθερά τῆς διάδοσης καί ἔχει τή μορφή

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{5-5}$$

ὅπου α ἡ σταθερά τῆς ἐξασθένησης καί β ἡ σταθερά τῆς φάσης.

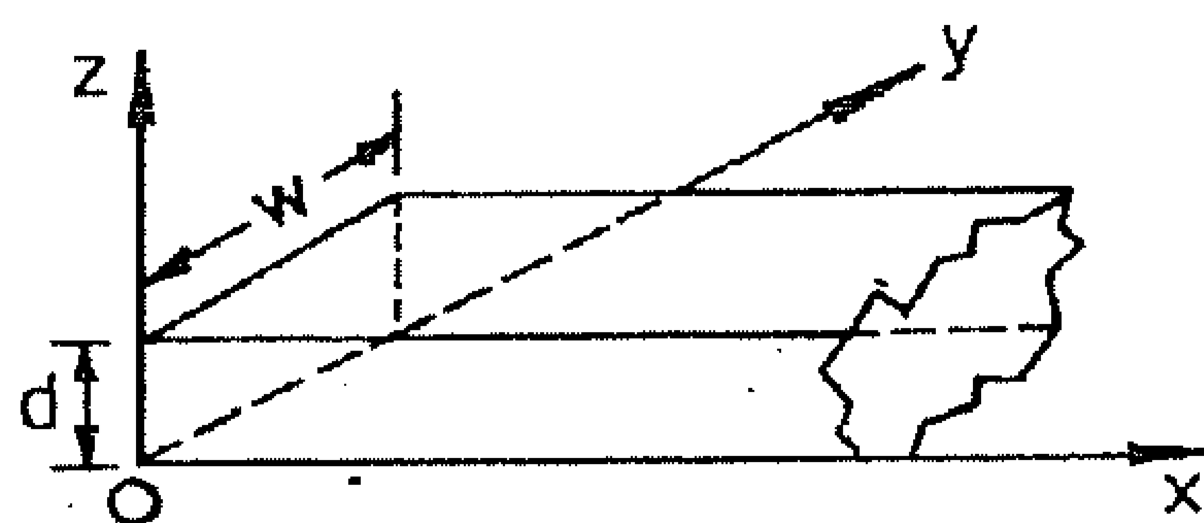
Τά φασικά διανύσματα (phasors), λοιπόν, τῶν πεδίων γράφονται :

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= \vec{\mathcal{E}}(x,u,\upsilon) = \vec{\mathcal{E}}(u,\upsilon)\, e^{-\gamma x} \\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) &= \vec{\mathcal{H}}(x,u,\upsilon) = \vec{\mathcal{H}}(u,\upsilon)\, e^{-\gamma x} \end{aligned}\right\} \tag{5-6}$$

ὅπου u καί υ εἶναι οἱ ἐγκάρσιες συντεταγμένες τοῦ σημείου Σ($\vec{r}$).
Ἔτσι ὁδηγούμαστε στή λύση ἑνός "ἐπίπεδου προβλήματος" (δύο διαστάσεων) .

5.2. Μελέτη Ὀρθογώνιου Κυματοδηγοῦ.

Ἔστω ἕνας ὀρθογώνιος κοῖλος κυματοδηγός, πού περιορίζεται ἀπό μιά τέλεια μεταλλική ἐπιφάνεια καί εἶναι γεμάτος μέ ὁμογενές ἰσότροπο διηλεκτρικό ὑλικό χωρίς ἀπώλειες (ε,μ πραγματικές σταθερές καί σ = 0)



Σχ. 5-2 Γεωμετρία ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ

Οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell γιά τό ἐσωτερικό τοῦ κυματοδηγοῦ γράφονται :

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{H} &= \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}7)$$

Ἄν περιοριστοῦμε στό ἁρμονικό κύμα

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\cdot e^{j\omega t} = \vec{\mathcal{E}}(y,z)\,e^{j\omega t-\gamma x} \qquad (5\text{-}8)$$

τότε οἱ (5-7) γίνονται :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathcal{H}_y}{\partial z} &= j\omega\varepsilon\mathcal{E}_x \\ \frac{\partial\mathcal{H}_x}{\partial z}+\gamma\mathcal{H}_z &= j\omega\varepsilon\mathcal{E}_y \\ -\gamma\mathcal{H}_y-\frac{\partial\mathcal{H}_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon\mathcal{E}_z \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}9) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial z} &= -j\omega\mu\mathcal{H}_x \\ \frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z}+\gamma\mathcal{E}_z &= -j\omega\mu\mathcal{H}_y \\ -\gamma\mathcal{E}_y-\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y} &= -j\omega\mu\mathcal{H}_z \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}10)$$

$$-\gamma \mathcal{E}_x + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0 \qquad (5-11)$$

$$-\gamma \mathcal{H}_x + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial z} = 0 \qquad (5-12)$$

Στίς ἐξισώσεις (5-9)ἕως (5-12) θεωροῦμε γνωστές τίς συνιστῶσες $\mathcal{E}_x$ καί $\mathcal{H}_x$ καί τίς παραγώγους τους καί τίς μεταφέρουμε στά δεύτερα μέλη. Ἔτσι ἔχουμε :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon \mathcal{E}_x \qquad (5-13)$$

$$\gamma \mathcal{H}_z - j\omega\varepsilon \mathcal{E}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} \qquad (5-14)$$

$$-\gamma \mathcal{E}_y - j\omega\varepsilon \mathcal{E}_z = \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \qquad (5-15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = -j\omega\mu \mathcal{E}_x \qquad (5-16)$$

$$\gamma \mathcal{E}_z + j\omega\mu \mathcal{H}_y = -\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} \qquad (5-17)$$

$$-\gamma \mathcal{E}_y + j\omega\mu \mathcal{H}_z = \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \qquad (5-18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = \gamma \mathcal{E}_x \qquad (5-19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial z} = \gamma \mathcal{H}_x \qquad (5-20)$$

Ἀπό τίς παραπάνω ἐξισώσεις ξεχωρίζουμε τό σύστημα τῶν (5-14)καί (5-18) :

$$\left.\begin{aligned} \gamma \mathcal{H}_z - j\omega\varepsilon \mathcal{E}_y &= -\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} \\ j\omega\mu \mathcal{H}_z - \gamma \mathcal{E}_y &= \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}21)$$

καί τό σύστημα τῶν (5-15) καί (5-17) :

$$\left.\begin{aligned} -\gamma \mathcal{H}_y - j\omega\varepsilon \mathcal{E}_z &= \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \\ j\omega\mu \mathcal{H}_y + \gamma \mathcal{E}_z &= -\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}22)$$

Ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν καί τῶν δύο αὐτῶν συστημάτων εἶναι:

$$\begin{vmatrix} \pm\gamma & -j\omega\varepsilon \\ j\omega\mu & \mp\gamma \end{vmatrix} = -\gamma^2 - \omega^2\varepsilon\mu = -k_c^2 \qquad (5\text{-}23)$$

ὅπου

$$k_c^2 \equiv \gamma^2 + \omega^2\varepsilon\mu = \gamma^2 + \left(\frac{\omega}{\upsilon}\right)^2 = \gamma^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \neq 0 \qquad (5\text{-}24)$$

καί $\frac{\omega}{\upsilon}$ ὁ κυματαριθμός τοῦ ἁρμονικοῦ κύματος ὅταν αὐτό διαδίδεται ἐλεύθερα μέσα στό ὑλικό.

Ἡ λύση τοῦ (5-21) εἶναι :

$$\mathcal{H}_z = -\frac{1}{k_c^2}\begin{vmatrix} -\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} & -j\omega\varepsilon \\ \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} & -\gamma \end{vmatrix} = -\frac{1}{k_c^2}\left(\gamma\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} + j\omega\varepsilon\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y}\right) \qquad (5\text{-}25)$$

$$\mathcal{E}_y = -\frac{1}{k_c^2}\begin{vmatrix} \gamma & -\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} \\ j\omega\mu & \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{1}{k_c^2}\left(\gamma \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z}\right) \qquad (5\text{-}26)$$

Ἡ λύση τοῦ (5-22) εἶναι:

$$\mathcal{H}_y = -\frac{1}{k_c^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} & -j\omega\varepsilon \\ -\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} & \gamma \end{vmatrix} = -\frac{1}{k_c^2}\left(\gamma \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} - j\omega\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}\right) \qquad (5\text{-}27)$$

$$\mathcal{E}_z = -\frac{1}{k_c^2}\begin{vmatrix} -\gamma & \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \\ j\omega\mu & -\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{k_c^2}\left(\gamma \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - j\omega\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y}\right) \qquad (5\text{-}28)$$

Οἱ σχέσεις (5-25) ἕως (5-28) δίνουν τίς συνιστῶσες $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_y$ $\mathcal{H}_z$ σάν συναρτήσεις τῶν παραγώγων τῶν $\mathcal{E}_x$ καί $\mathcal{H}_x$. Ἄν τίς ἐκφράσεις αὐτές τίς πολλαπλασιάσουμε ἐπί τόν παράγοντα $e^{j\omega t-\gamma x}$ καί πάρουμε τό πραγματικό μέρος θά ἔχουμε τίς ἀντίστοιχες συνιστῶσες τῶν πραγματικῶν πεδίων $\vec{E}$ καί $\vec{H}$.

Τίς παραπάνω σχέσεις τίς συνοψίζουμε :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_y &= -\frac{1}{k_c^2}\left[\gamma \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z}\right] \\
\mathcal{E}_z &= -\frac{1}{k_c^2}\left[\gamma \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - j\omega\mu \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y}\right] \\
\mathcal{H}_y &= -\frac{1}{k_c^2}\left[-j\omega\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} + \gamma \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y}\right] \\
\mathcal{H}_z &= -\frac{1}{k_c^2}\left[j\omega\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z}\right]
\end{aligned} \qquad (5\text{-}29)$$

5.2.1. Ἐγκάρσιος ἠλεκτρικός κυματικός τύπος (TE)

Στόν τύπο αὐτόν εἶναι :

$$\mathcal{E}_x = 0 \qquad (5\text{-}30)$$

καί οἱ (5-29) παίρνουν τή μορφή :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_y &= -\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} \\ \mathcal{E}_z &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \\ \mathcal{H}_y &= -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} \\ \mathcal{H}_z &= -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}31)$$

Οἱ (5-31) δίνουν ὅλες τίς συνιστῶσες τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου σέ συνάρτηση μέ μιά μόνο, τήν H_x , πού εἶναι ἡ μόνη ἄγνωστη. Ἡ μορφή, ἐπομένως τῆς H_x θά καθορίσει τήν ἀκριβή μορφή τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος.

Χρησιμοποιώντας τίς δύο τελευταῖες σχέσεις τῶν (5-31) καί τήν (5-20) ἔχουμε :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_x}{\partial z^2} = -k_c^2 \mathcal{H}_x$$

ἤ

$$\nabla_T^2 \mathcal{H}_x + k_c^2 \mathcal{H}_x = 0 \qquad (5\text{-}32)$$

Ἄν λύσουμε τήν (5-32) καί προσδιορίσουμε τήν H_x τότε ἀπό τίς (5-31) θά προσδιορίσουμε καί τίς ἄλλες συνιστῶσες καί θά ἔχουμε

λύσει τό πρόβλημα τοῦ κυματικοῦ τύπου TE στόν ὀρθογώνιο κυματοδηγό.

Ἡ (5-32) μᾶς ἐπιτρέπει νά θεωρήσουμε ὅτι :

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_0' \, U(y,z) \tag{5-33}$$

ὅπου ἡ συνάρτηση U ὑπακούει στή διαφορική ἐξίσωση κύματος:

$$\nabla_T^2 U + k_c^2 U = 0 \tag{5-34}$$

Γιά νά λύσουμε τήν (5-34) θεωροῦμε ὅτι ἡ λύση εἶναι συνάρτηση μέ χωριζόμενες μεταβλητές, δηλαδή :

$$U(y,z) = f_1(y)\, f_2(z) \tag{5-35}$$

ὁπότε ἀντικαθιστώντας στήν (5-34) ἔχουμε :

$$\frac{1}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dy^2} + \frac{1}{f_2}\frac{d^2 f_2}{dz^2} = -k_c^2$$

Γιά νά ἀληθεύει ὅμως αὐτή μέ τυχαῖα y καί z πρέπει κάθε προσθετέος τοῦ πρώτου μέλους της νά εἶναι σταθερός, δηλαδή :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dy^2} &= -k_y^2 \\ \frac{1}{f_2}\frac{d^2 f_2}{dz^2} &= -k_z^2 \\ \text{καί} \quad k_y^2 + k_z^2 &= k_c^2 \end{aligned}\right\} \tag{5-36}$$

$$\text{καί} \quad \left.\begin{aligned} \frac{d^2 f_1}{dy^2} + k_y^2 f_1 &= 0 \\ \frac{d^2 f_2}{dz^2} + k_z^2 f_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5-37}$$

Οἱ (5-37) ἔχουν τίς λύσεις :

$$f_1(y) = C_1 \cos k_y y + C_2 \sin k_y y$$
$$f_2(z) = C_3 \cos k_z z + C_4 \sin k_z z \qquad (5\text{-}38)$$

ὅπου C_1 , C_2 , C_3 , C_4 σταθερές τῆς ὁλοκλήρωσης.

Ὥστε :

$$U = (C_1 \cos k_y y + C_2 \sin k_y y)(C_3 \cos k_z z + C_4 \sin k_z z) \qquad (5\text{-}39)$$

καί $$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_0'(C_1 \cos k_y y + C_2 \sin k_y y)(C_3 \cos k_z z + C_4 \sin k_z z) \qquad (5\text{-}40)$$

καί

$$\mathcal{H}_x(\vec{r},t) = \mathcal{H}_0'(C_1 \cos k_y y + C_2 \sin k_y y)(C_3 \cos k_z z + C_4 \sin k_z z)\, e^{j\omega t - \gamma x} \qquad (5\text{-}41)$$

ὅπου (βλ. σχέση (5-24) :

$$\gamma^2 = k_c^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \qquad (5\text{-}42)$$

Πρίν ἀκόμα προσδιορίσουμε τίς σταθερές C_1 , C_2 , C_3,C_4 μποροῦμε νά κάνουμε τήν ἀκόλουθη διερεύνηση τῆς (5-41) :

I. Ἄν $\lambda = \dfrac{2\pi}{k_c}$

Τότε $\gamma = 0$ καί τότε δέν ὑπάρχει καμιά δυνατότητα διάδοσης ("συνθήκη ἀποκοπῆς") . Τό ἀντίστοιχο μῆκος κύματος λέγεται ὁρικό μῆκος κύματος :

$$\lambda_{op} = \frac{2\pi}{k_c}$$

II. Ἄν $\lambda > \dfrac{2\pi}{k_c}$. (δηλ. $\lambda > \lambda_{op}$)

Τότε τό γ εἶναι πραγματικό καί ὁ παράγοντας $e^{-\gamma x}$ εἶναι

ἁπλά ἕνας παράγοντας ἐξασθένησης ὅσο αὐξάνεται τό x,καί ἡ(5-41) ἐκφράζει μιά ἁρμονική ταλάντωση ($e^{j\omega t}$), πού ὅσο μεγαλώνει τό x, τό πλάτος της μικραίνει ἐνῶ ἡ φάση της μένει ἀμετάβλητη.'Η διάδοση δέν εἶναι δυνατή παρά σέ πολύ μικρές μόνο ἀποστάσεις.

III. "Αν $\lambda < \frac{2\pi}{k_c}$ (δηλ. $\lambda < \lambda_{op}$)

Τότε τό γ εἶναι φανταστικό, $\gamma = j\beta$, καί ὁ παράγοντας $e^{-\gamma x} = e^{-j\beta x}$ δέν προκαλεῖ ἐξασθένηση ἀλλά μόνο ἀλλαγή φάσης, πού μέ τόν παράγοντα $e^{j\omega t}$ δίνουν τόν παράγοντα $e^{j(\omega t-\beta x)}$ τοῦ διαδιδόμενου κύματος κατά τόν ἄξονα +x .

Στά παρακάτω θά ἐργαστοῦμε γιά τήν περίπτωση (III) ὅταν δηλαδή $\lambda < \lambda_{op}$ ὁπότε

$$\gamma = j\beta = j\,\frac{2\pi}{\lambda_\kappa} \qquad (5\text{-}43)$$

ὅπου λ_κ τό μῆκος τοῦ κύματος πού διαδίδεται μέσα στόν κυματοδηγό. 'Από τήν (5-42) ἔχουμε :

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k_c^2 \qquad (5\text{-}44)$$

ἤ

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_\kappa}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k_c^2$$

ἤ

$$\frac{1}{\lambda_\kappa^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{op}^2} \qquad (5\text{-}45)$$

"Ωστε τό μῆκος κύματος λ_κ μέσα στόν κυματοδηγό εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό μῆκος κύματος στό ἀπεριόριστο διηλεκτρικό μέσο .

Προσδιορισμός τῶν σταθερῶν C_1, C_2, C_3, C_4 τῆς (5-40)

Δεδομένου ὅτι τά τοιχώματα τοῦ κυματοδηγοῦ εἶναι ἐντελῶς ἀγώγιμα, πρέπει ἡ ἐφαπτομενική συνιστῶσα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου νά εἶναι ἴση μέ μηδέν. Θά πρέπει δηλαδή (βλ. σχ.5-2) γιά $y = 0$ καί $y = w$ νά εἶναι $E_z = 0$ καί γιά $z = 0$ καί $z = d$ νά εἶναι $E_y = 0$.

Ἀπό τίς (5-31) γιά $y = 0$ ἤ $y = w$, ἔχουμε :

$$\left.\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y}\right|_{\substack{y=0 \\ \text{ἤ } y=w}} = 0 \qquad (5\text{-}46)$$

καί γιά $z = 0$, ἤ $z = d$ ἔχουμε :

$$\left.\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z}\right|_{\substack{z=0 \\ \text{ἤ } z=d}} = 0 \qquad (5\text{-}47)$$

Ἀπό τήν (5-40) ἔχουμε :

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = \mathcal{H}_0'(-k_y C_1 \sin k_y y + k_y C_2 \cos k_y y)(C_3 \cos k_z z + C_4 \sin k_z z) \qquad (5\text{-}48)$$

καί

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} = \mathcal{H}_0'(C_1 \cos k_y y + C_2 \sin k_y y)(-k_z C_3 \sin k_z z + k_z C_4 \cos k_z z) \qquad (5\text{-}49)$$

Ἐφαρμόζοντας τήν (5-46) στήν (5-48) ἔχουμε :

$$\begin{aligned} C_1 \sin k_y w &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (5\text{-}50)$$

καί τήν (5-47) στήν (5-49) ἔχουμε :

$$\begin{aligned} C_3 \sin k_z d &= 0 \\ C_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (5\text{-}51)$$

Συνοψίζοντας, γιά νά ἔχουμε κύμα μέσα στόν κυματοδηγό, σύμφωνα μέ τίς (5-50) καί (5-51), πρέπει :

$$\left.\begin{array}{lll} C_1\,,\,C_3 \neq 0 & & \\ C_2\,,\,C_4 = 0 & & \\ \sin k_y w = 0 & \text{ἤ} & k_y w = 0,\pi,2\pi,\ldots,m\pi \\ \sin k_z d = 0 & \text{ἤ} & k_z d = 0,\pi,2\pi,\ldots,n\pi \end{array}\right\} \quad (5\text{-}52)$$

ὅπου m καί n ἀκέραιοι θετικοί ἤ μηδέν.

Ὥστε οἱ (5-40), (5-48), (5-49) γίνονται :

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_0 \cos k_y y \cos k_z z \quad (5\text{-}53)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = -\mathcal{H}_0 k_y \sin k_y y \cos k_z z \quad (5\text{-}54)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} = -\mathcal{H}_0 k_z \cos k_y y \sin k_z z \quad (5\text{-}55)$$

ὅπου

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0' C_1 C_3 \quad (5\text{-}56)$$

Χρησιμοποιώντας στίς (5-31) τίς (5-8), (5-43),(5-54) καί (5-55) ἔχουμε τελικά :

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{H}_x = \mathcal{H}_0 \cos k_y y \cos k_z z \; e^{j(\omega t - \beta x)} \\ \mathcal{H}_y = \dfrac{j\beta k_y}{k_c^2} \mathcal{H}_0 \sin k_y y \cos k_z z \; e^{j(\omega t - \beta x)} \\ \mathcal{H}_z = \dfrac{j\beta k_z}{k_c^2} \mathcal{H}_0 \cos k_y y \sin k_z z \; e^{j(\omega t - \beta x)} \\ \mathcal{E}_x = 0 \end{array}\right\} \quad (5\text{-}57)$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{j\omega\mu k_z}{k_c^2} \mathcal{H}_0 \cos k_y y \sin k_z z \, e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$\mathcal{E}_z = \frac{-j\omega\mu k_y}{k_c^2} \mathcal{H}_0 \sin k_y y \cos k_z z \, e^{j(\omega t - \beta x)} \qquad (5\text{-}57)$$

ὅπου $k_y = \frac{m\pi}{w}$, $k_z = \frac{n\pi}{d}$, (5-58)

m =0,1,2,..... καί n=0,1,2,...

ἀλλά (m,n)≠(0,0) (5-59)

καί $k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{w^2} + \frac{n^2}{d^2}\right)$ (5-60)

Ἀπό τήν τελευταία καί ἐπειδή

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_{op}} \qquad (5\text{-}61)$$

ἔχουμε :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_{op}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2}{w^2} + \frac{n^2}{d^2}}} \qquad (5\text{-}62)$$

ὅπου λ_{op} τό ὁρικό μῆκος κύματος, πού καθορίζεται ἀπό τό ζευγάρι τῶν ἀκεραίων (m,n). Ἀπό τίς (5-44),(5-60),(5-62) ἔχουμε :

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_K}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \pi^2\left(\frac{m^2}{w^2} + \frac{n^2}{d^2}\right) = 4\pi^2\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{op}^2}\right) \qquad (5\text{-}63)$$

Ὥστε,ψάχνοντας γιά λύσεις στόν κυματικό τύπο TE καταλήξαμε στίς (5-57), πού περιγράφουν τήν πεδιακή κατανομή μέσα στόν κυματοδηγό. Γιά κάθε ζευγάρι (m,n) ἔχουμε καί μιά συγκεκριμένη πεδιακή κατανομή, πού χαρακτηρίζεται ὡς TE_{mn} καί ἔχει τό ὁρικό μῆκος κύματος τῆς (5-62) (συνάρτηση τῶν ἐγκάρσιων διαστάσεων τοῦ κυ-

ματοδηγοῦ (d,w), καί σταθερά φάσης, αὐτήν πού δίνει ἡ (5-63) .

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α ὁ τύπος TE_{10}. Στόν τύπο αὐτό ἔχουμε m=1 , n=0 καί ἑπομένως ὁρικό μῆκος κύματος:

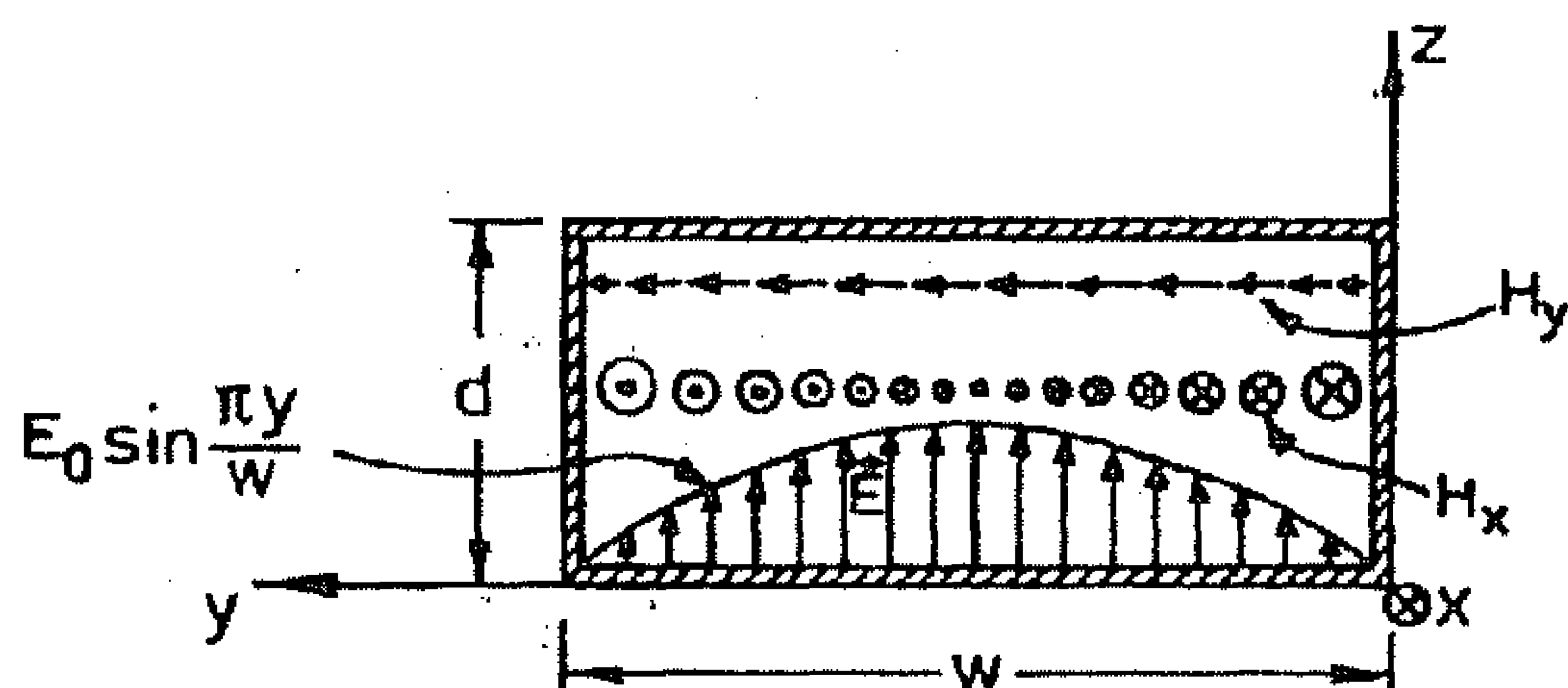
$$\frac{1}{\lambda_{10,op}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{w^2}} = \frac{1}{2w} \qquad (5\text{-}64)$$

καί

$$k_y = \frac{\pi}{w} \quad , \quad k_z = 0 \quad , \quad \beta_{10}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \frac{\pi^2}{w^2} \qquad (5\text{-}65)$$

Ἡ ἀντίστοιχη πεδιακή κατανομή εἶναι :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_x &= \mathcal{H}_0 \cos\frac{\pi y}{w}\, e^{j(\omega t - \beta_{10} x)} \\
\mathcal{H}_y &= \frac{j\beta_{10} w}{\pi}\, \mathcal{H}_0 \sin\frac{\pi y}{w}\, e^{j(\omega t - \beta_{10} x)} \\
\mathcal{H}_z &= 0 \\
\mathcal{E}_x &= 0 \\
\mathcal{E}_y &= 0 \\
\mathcal{E}_z &= \frac{-j\omega\mu w}{\pi}\, \mathcal{H}_0 \sin\frac{\pi y}{w}\, e^{j(\omega t - \beta_{10} x)}
\end{aligned} \qquad (5\text{-}66)$$



Σχ. 5-3 Μιά πρώτη παραστατική περιγραφή τῆς πεδιακῆς κατανομῆς τοῦ τύπου TE_{10} (βλ. καί σχ. 5-4)

Στό σχῆμα 5-3 δίνεται μιά παραστατική περιγραφή τῆς πεδιακῆς κατανομῆς σέ μιά ἐγκάρσια διατομή τοῦ κυματοδηγου, ἀνεξάρτητα γιά τή κάθε συνιστώσα.

Μέ τή βοήθεια τῆς κυματικῆς ἀντίστασης τοῦ κυματοδηγοῦ γιά τόν τύπο TE, πού ὁρίζεται ἀπό τήν:

$$Z_{TE}=\frac{Z}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}}=\frac{Z}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2}} \qquad (5\text{-}67)$$

ὅπου $$Z=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (5\text{-}68)$$

ἡ γνωστή μας κυματική ἀντίσταση τοῦ μέσου, μποροῦμε νά γράφουμε τίς (5-57) ἔτσι*):

ΤΥΠΟΣ ΤΕ	$\mathcal{E}_x=0$ $\mathcal{E}_y=jZ\frac{k_z}{k_c}\frac{\lambda_{op}}{\lambda}\mathcal{H}_0\cos k_y y\sin k_z z\, e^{j(\omega t-\beta x)}$ $\mathcal{E}_z=-jZ\frac{k_y}{k_c}\frac{\lambda_{op}}{\lambda}\mathcal{H}_0\sin k_y y\cos k_z z\, e^{j(\omega t-\beta x)}$ $\mathcal{H}_x=\mathcal{H}_0\cos k_y y\cos k_z z\, e^{j(\omega t-\beta x)}$ $\mathcal{H}_y=-\frac{\mathcal{E}_z}{Z_{TE}}$ $\mathcal{H}_z=\frac{\mathcal{E}_y}{Z_{TE}}$

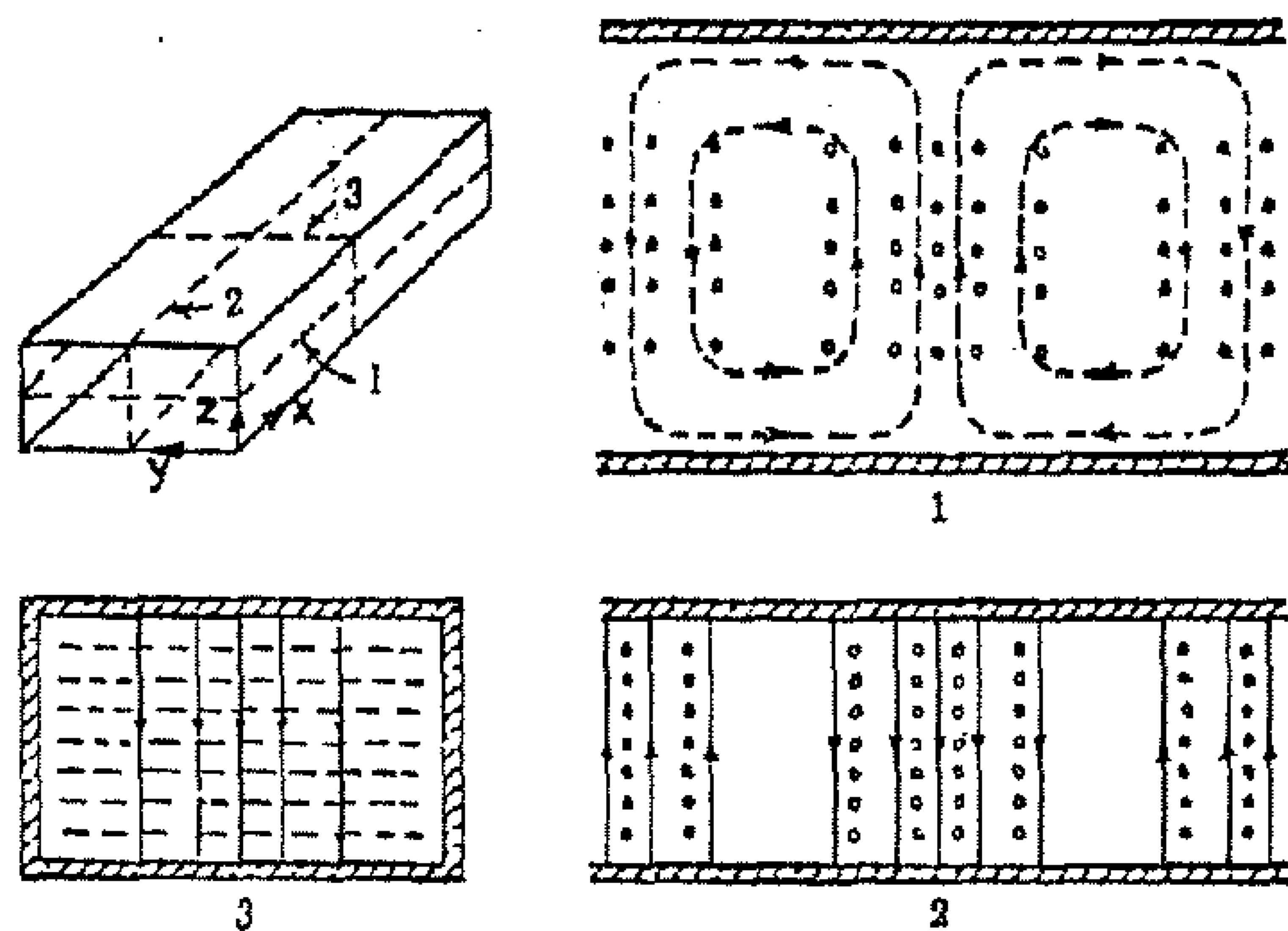
(5-69)

Στό σχ. 5-4 δίνεται ἡ πεδιακή κατανομή διαφόρων κυματικῶν τύπων σέ ὀρθογώνιο κυματοδηγό.

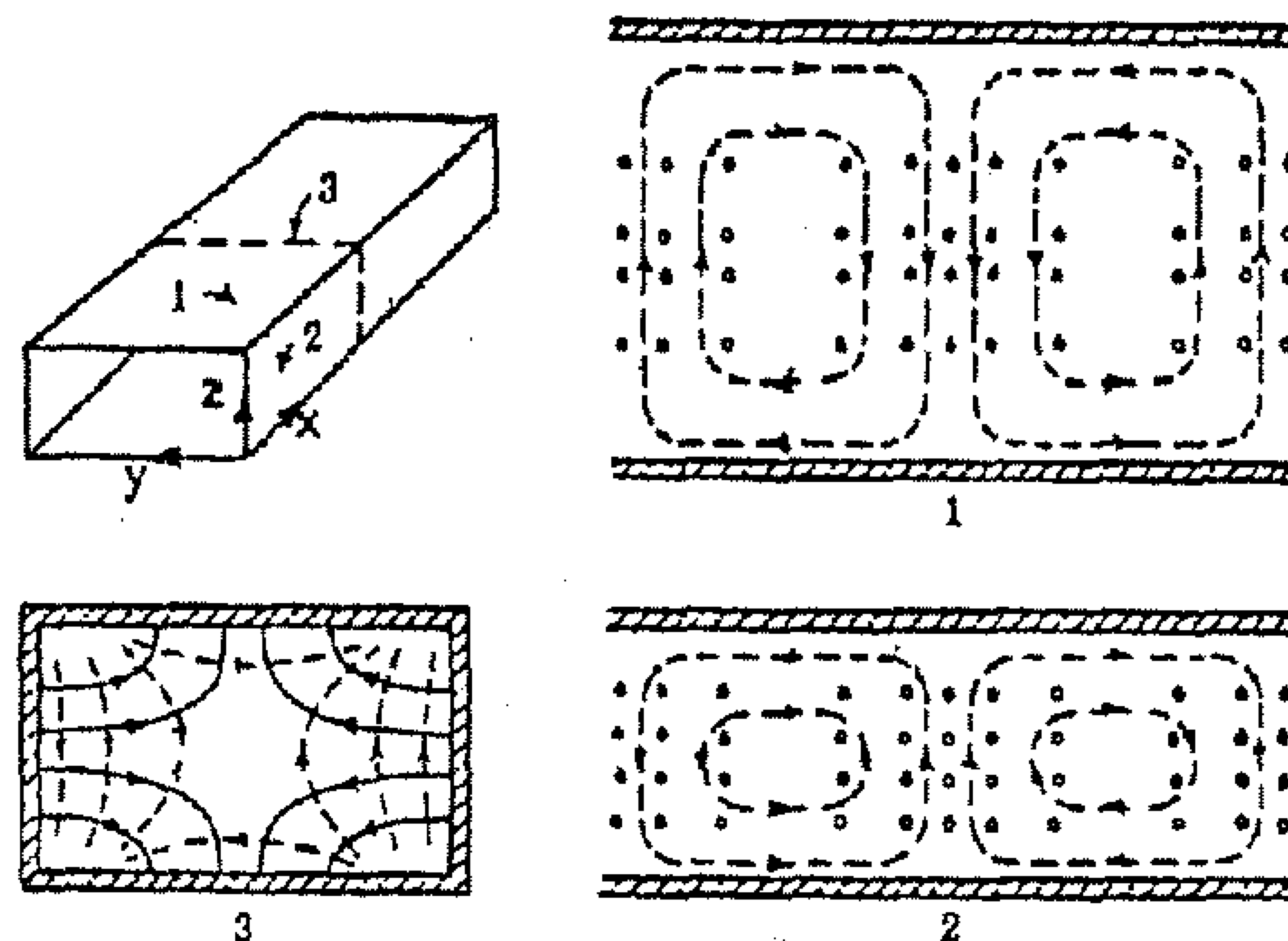
---

*) Γιά κύματα πού τρέχουν πρός τό −x ($e^{j(\omega t+\beta x)}$), ἀλλάζουν πρόσημο οἱ ὅροι πού περιέχουν τό Z_{TE} .

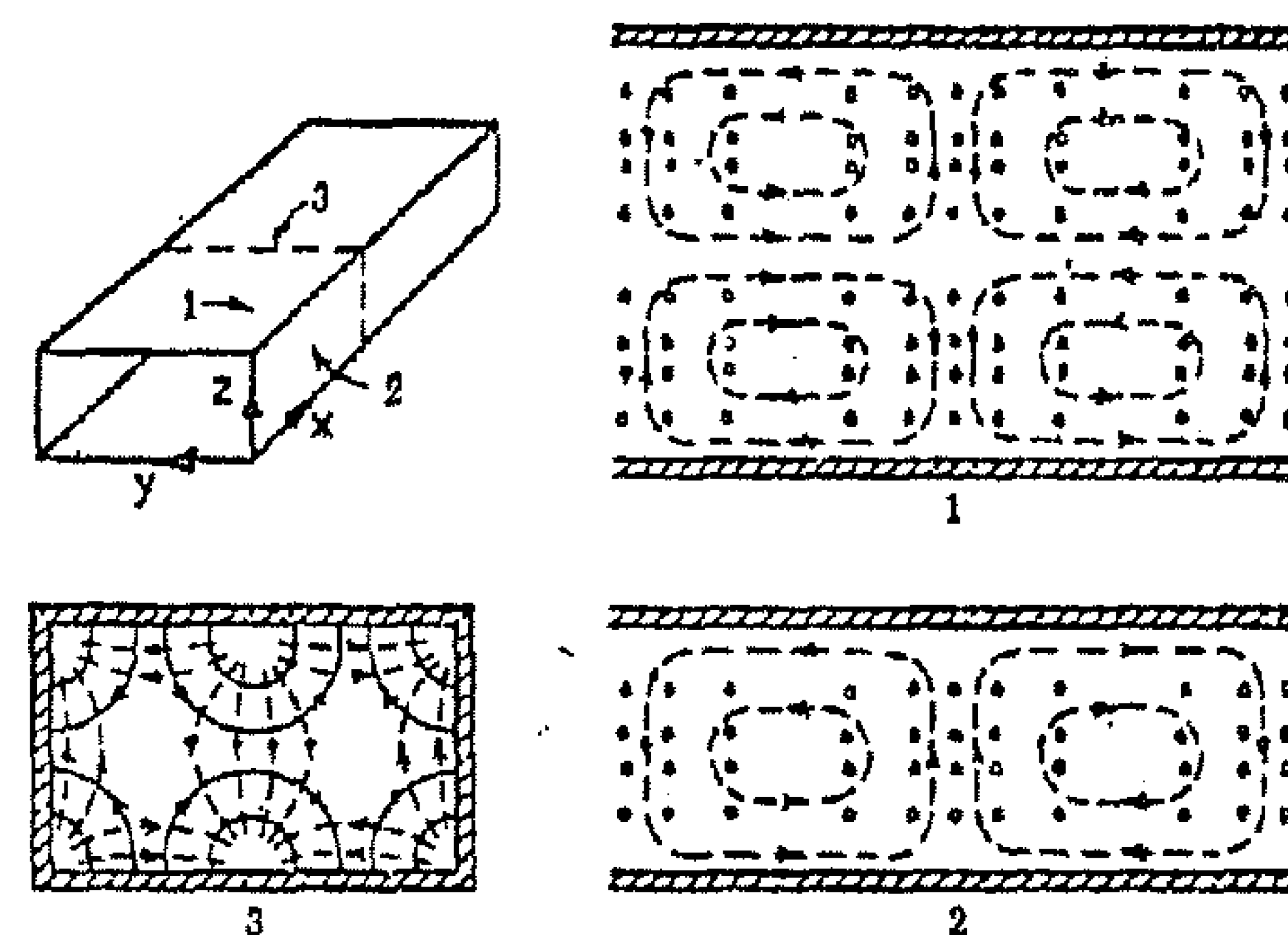
TE_{10}



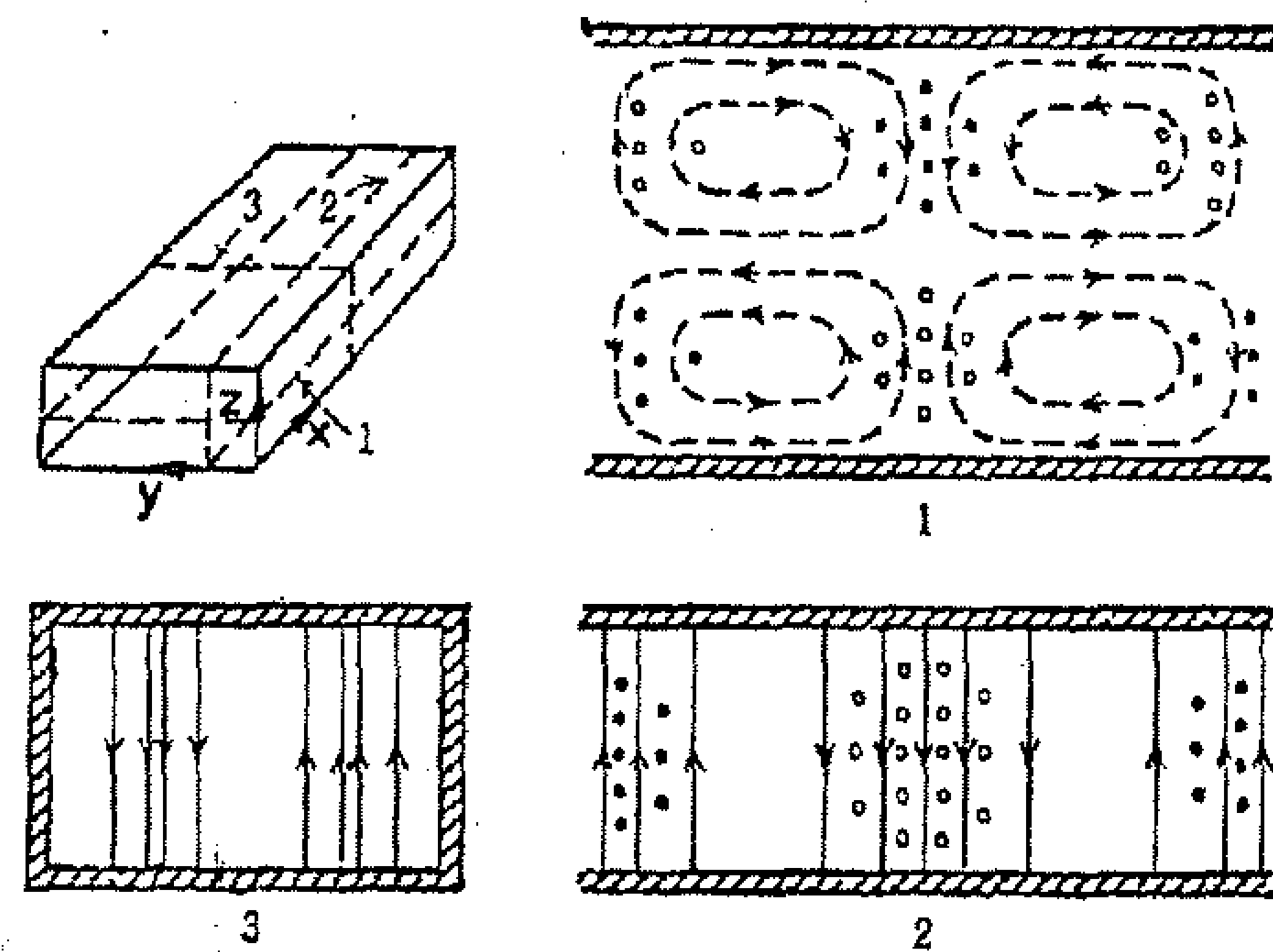
TE_{11}



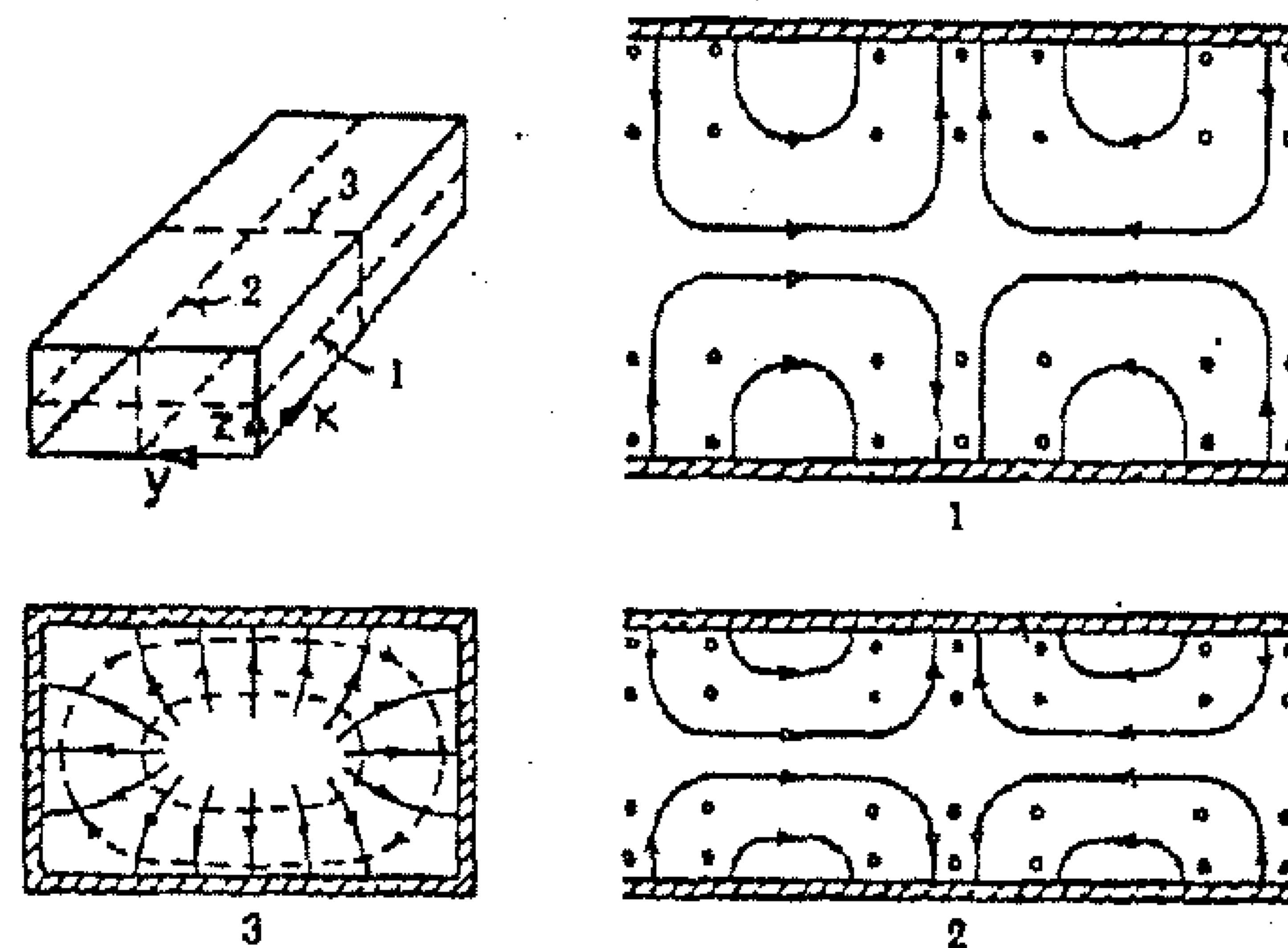
TE_{21}



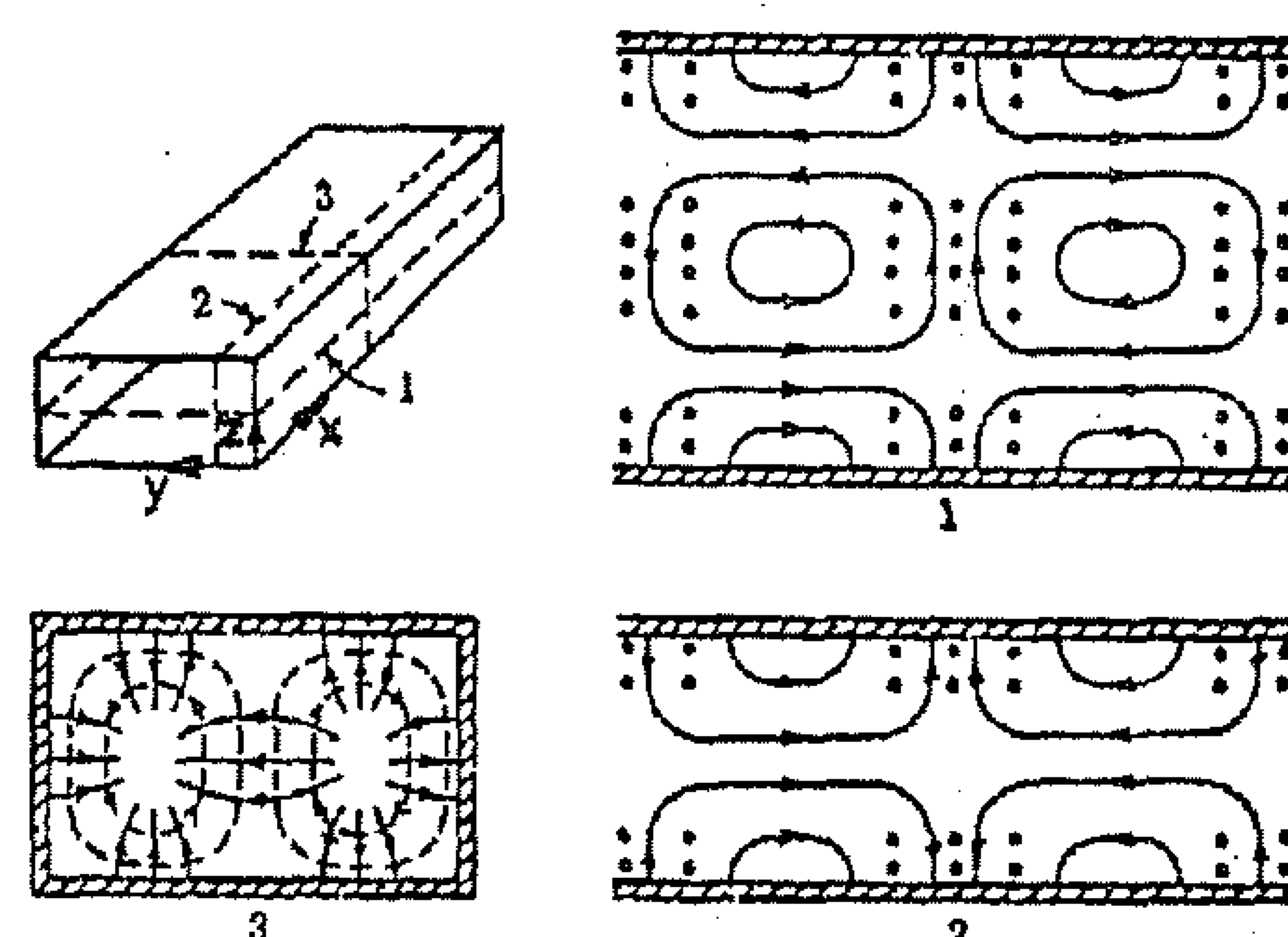
TE_{20}



TM_{11}



TM_{21}



Σχ. 5-4 Πεδιακή κατανομή διαφόρων κυματικών τύπων σέ όρθογώνιο κυματοδηγό

5.2.2. Ἐγκάρσιος μαγνητικός κυματικός τύπος (ΤΜ).

Ὅπως στόν κυματικό τύπο ΤΕ, ἔτσι καί στόν τύπο ΤΜ, ξεκινώντας ἀπό τίς (5-29), ἀπαιτώντας

$$\mathcal{H}_x = 0 \qquad (5\text{-}70)$$

καί ὑποθέτοντας ὅτι :

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0' U(y,z) \qquad (5\text{-}71)$$

καταλήγουμε στήν ἴδια διαφορική ἐξίσωση τῆς U δηλ. τήν (5-34), πού ἔχει λύση τήν (5-39). Ἀπό αὐτήν καί ἀπό τήν (5-71), μέ ἐφαρμογή τῶν κατάλληλων ὁριακῶν συνθηκῶν προσδιορίζουμε τίς ἐξισώσεις τοῦ πεδίου.

Καί πάλι μέ τήν βοήθεια τῆς κυματικῆς ἀντίστασης τοῦ κυματοδηγοῦ γιά τόν κυματικό τύπο ΤΜ :

$$Z_{TM} = Z\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2} = Z\sqrt{1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2} \qquad (5\text{-}72)$$

μποροῦμε νά ἐκφράσουμε τίς συνιστῶσες τοῦ πεδίου, ἀνάλογα μέ τίς (5-69)*)

ΤΥΠΟΣ ΤΜ	$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_0 \sin k_y y \sin k_z z\, e^{j(\omega t-\beta x)}$ $\mathcal{H}_y = \frac{j}{Z}\frac{k_z}{k_c}\frac{\lambda_{op}}{\lambda}\mathcal{E}_0 \sin k_y y \cos k_z z\, e^{j(\omega t-\beta x)}$ $\mathcal{H}_z = \frac{-j}{Z}\frac{k_y}{k_c}\frac{\lambda_{op}}{\lambda}\mathcal{E}_0 \cos k_y y \sin k_z z\, e^{j(\omega t-\beta x)}$ $\mathcal{E}_y = Z_{TM}\mathcal{H}_z$ $\mathcal{E}_z = -Z_{TM}\mathcal{H}_y$ $\mathcal{H}_x = 0$

(5-73)

*) Γιά κύματα, πού τρέχουν πρός τό $-x$ ($e^{j(\omega t+\beta x)}$, ἀλλάζουν πρόσημο οἱ ὅροι πού περιέχουν τό Z_{TM}.

ὅπου

$$k_y = \frac{m\pi}{w} \quad , \quad k_z = \frac{n\pi}{d} \quad , \quad k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 \tag{5-74}$$

μέ m = 1,2,3, ... καί n = 1,2,3, ...

$$\lambda_{op} = \frac{2\pi}{k_c} \tag{5-75}$$

$$\beta^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k_c^2 \tag{5-76}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_k} \tag{5-77}$$

καί

$$\frac{1}{\lambda_k^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{op}^2} \tag{5-78}$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η . Ὅπως φαίνεται ἀπό τίς (5-69) δέν ὑπάρχει κυματικός τύπος TE_{00} , ἐνῶ ἀπό τίς (5-73)φαίνεται ὅτι δέν ὑπάρχουν οἱ κυματικοί τύποι TM_{on} ἤ TM_{mo}, δηλ. τά m καί n δέν παίρνουν τιμή μηδέν.

5.2.3. Μερικά πρακτικά συμπεράσματα.

Ἀπό τά πιό πάνω βλέπουμε ὅτι γιά κάθε ὀρθογώνιο κυματοδηγό μέ ὁρισμένες ἐγκάρσιες διαστάσεις (w,d), γεμάτο μέ διηλεκτρικό ὑλικό (μ,ε), καί γιά κάθε ἐπιθυμητό κυματικό τύπο (TE_{mn}, TM_{mn}) ὑπάρχει ἕνα ὁ ρ ι κ ό μ ῆ κ ο ς κύματος λ_{op} :

$$\frac{1}{\lambda_{op}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{w}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2} \tag{5-79}$$

πού ἀντιστοιχεῖ σέ μιά ἐ λ ά χ ι σ τ η ὁ ρ ι κ ή συχ - ν ό τ η τ α f_{op} :

$$f_{o\rho} = \frac{\upsilon}{\lambda_{o\rho}} = \frac{1}{\lambda_{o\rho}\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{5-80}$$

ὅπου υ ἡ ταχύτητα τοῦ κύματος στό ἐλεύθερο διηλεκτρικό. Κάτω ἀπό τή συχνότητα αὐτή ἡ διάδοση ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος εἶναι ἀδύνατη ἐπειδή ὑπάρχει πολύ μεγάλη ἐξασθένηση.

Ἡ σταθερά τῆς διάδοσης πού ἀντιστοιχεῖ σέ κάθε τύπο (m,n) εἶναι φανταστική :

$$\gamma = j\beta \tag{5-81}$$

ὅπου

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_\kappa} \tag{5-82}$$

ἡ σταθερά φάσης τοῦ τύπου (m,n) καί λ_κ τό μῆκος κύματος τοῦ τύπου αὐτοῦ μέσα στόν κυματοδηγό :

$$\frac{1}{\lambda_\kappa^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{o\rho}^2} \tag{5-83}$$

ἤ

$$\lambda_\kappa = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{o\rho}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{o\rho}}{f}\right)^2}} \tag{5-84}$$

ὅπου

$$\lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{1}{f\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{5-85}$$

τό μῆκος κύματος στό ἐλεύθερο διηλεκτρικό. Δηλαδή :

$$\lambda_\kappa > \lambda \tag{5-86}$$

Ἡ σταθερά φάσης γράφεται :

$$\beta = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{o\rho}^2}} \tag{5-87}$$

Ἡ " ταχύτητα φάσης " υ_p , μέ τήν ὁποία διαδίδεται ἡ ἰσοφασική ἐπιφάνεια μέσα στόν κυματοδηγό εἶναι:

$$\upsilon_p = f\,\lambda_\kappa = \upsilon\,\frac{\lambda_\kappa}{\lambda} \tag{5-88}$$

$$\boxed{\upsilon_p = \frac{\upsilon}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2}} = \frac{\upsilon}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}}} \tag{5-89}$$

Ἡ ταχύτητα μέ τήν ὁποία διαδίδεται ἡ ἐνέργεια μέσα στόν κυματοδηγό καί μέ τήν ὁποία διαδίδεται καί κάθε σῆμα διαμορφώσεως τοῦ ΗΜ κύματος λέγεται " ταχύτητα ὁμάδας " (υ_g) καί ἀποδείχνεται ὅτι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{d\beta} \tag{5-90}$$

Τήν (5-87) τή γράφουμε ὡς ἑξῆς :

$$\beta^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda_{op}^2} = \frac{\omega^2}{\upsilon^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda_{op}^2} \tag{5-91}$$

Ἀπό αὐτήν ἔχουμε :

$$2\beta\,d\beta = \frac{1}{\upsilon^2}\,2\omega\,d\omega \tag{5-92}$$

καί
$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \beta\left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)\upsilon = \frac{2\pi}{\lambda_\kappa}\,\frac{\lambda}{2\pi}\,\upsilon$$

ἤ
$$\upsilon_g = \upsilon \cdot \frac{\lambda}{\lambda_\kappa} \tag{5-93}$$

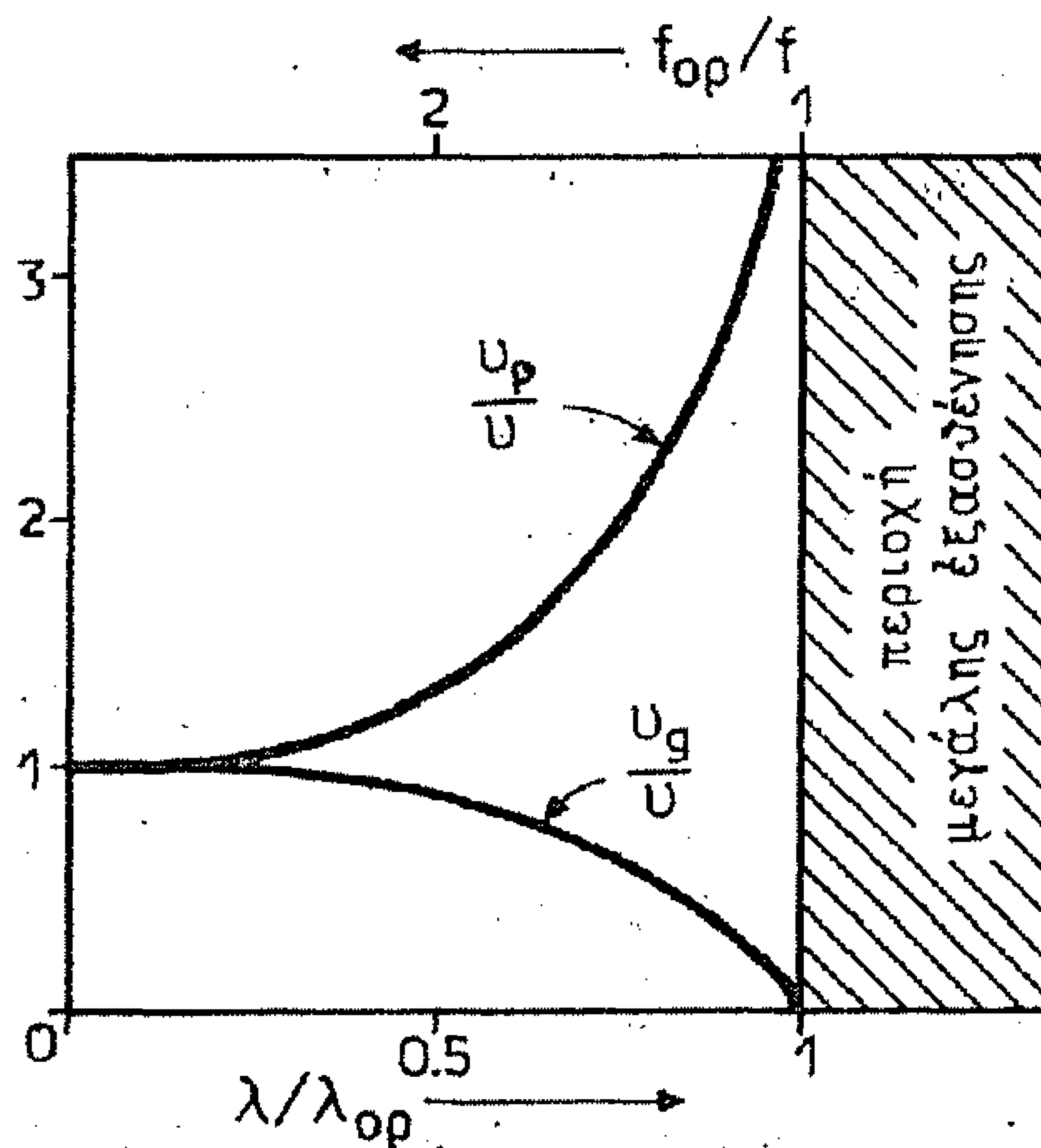
ἤ

$$\boxed{\upsilon_g = \upsilon\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2} = \upsilon\sqrt{1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \qquad (5\text{-}94)$$

Ἀπό τίς (5-88) καί (5-93) προκύπτει:

$$\boxed{\upsilon_p \upsilon_g = \upsilon^2} \qquad (5\text{-}95)$$

Στό διάγραμμα τοῦ σχ.5-5 παριστάνεται ἡ μεταβολή τῶν σχετικῶν ταχυτήτων υ_p/υ καί υ_g/υ σάν συνάρτηση τῶν λ/λ_{op} ἤ f_{op}/f .



Σχ. 5-5 Σχετικές τιμές τῆς ταχύτητας φάσης υ_p καί τῆς ταχύτητας ὁμάδας υ_g, μέσα σ' ἕναν ὀρθογώνιο κυματοδηγό, ὡς πρός τήν ταχύτητα υ στό ἐλεύθερο διηλεκτρικό.

<u>Παρατήρηση</u> .Στόν κυματικό τύπο m,n (TE_{mn} ἤ TM_{mn}) ὁ δείκτης m ἐκφράζει τόν ἀριθμό τῶν "μισῶν" ἡμιτονοειδῶν διακυμάνσεων πλάτους τῆς ἀντίστοιχης συνιστώσας κατά τή διεύθυνση y καί σ' ὅλο τό πλάτος w τῆς διατομῆς τοῦ ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ, ἐνῶ ὁ δείκτης n τόν ἀντίστοιχο ἀριθμό κατά τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα z καί σ' ὅλο τό ὕφος d τῆς διατομῆς. Π.Χ. ὁ TE_{10} σ' ὅλο τό πλάτος w ἐμφανίζει μισή ἡμιτονοειδή διακύμανση (τό ὄρισμα $\frac{\pi y}{w}$ μεταβάλλεται ἀπό 0 ἕως π) , γιά κάθε συνιστώσα, ἐνῶ σ' ὅλο τό ὕφος d δέν ἐμφανίζεται καμιά διακύμανση. Ὁ TE_{22} ἐμφανίζει σ' ὅλο τό w καί σ' ὅλο τό d μιά ὁλόκληρη ἡμιτονοειδή διακύμανση .

5.2.4. Ἐξασθένηση τοῦ κύματος κατά τή διάδοση μέσα σέ ὀρθογώνιο κυματοδηγό (Οἱ βασικές σχέσεις).

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ὅτι τό κύμα, καθώς διαδίδεται μέσα στόν κυματοδηγό, δέν παθαίνει ἐξασθένηση. Στήν πράξη, ὅμως, δέν συμβαίνει αὐτό, γιατί καί τά τοιχώματα τοῦ κυματοδηγοῦ δέν ἔχουν ἄπειρη ἀγωγιμότητα ($\sigma_c<\infty$) καί τό διηλεκτρικό δέν ἔχει μηδενική ἀγωγιμότητα ($\sigma_d\neq 0$). Ὥστε, ἡ μεταδιδόμενη ἰσχύς πολλαπλασιάζεται ἐπί τόν παράγοντα $e^{-2\alpha_t x}$, ὅπου α_t ἡ τιμή τοῦ ὁλικοῦ συντελεστῆ ἐξασθένησης. Δηλαδή:

$$P = P_0\, e^{-2\alpha_t x} \qquad (5\text{-}96)$$

Ἡ ἐξασθένηση ΔL, στή δοσμένη ἀπόσταση Δx, σέ decibel (dB) εἶναι:

$$\Delta L = 10\log\frac{P_0}{P} = 10\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln\frac{P_0}{P} = 8{,}686\,\alpha_t\Delta x = A_t\,\Delta x \qquad (5\text{-}97)$$

ἀπό ὅπου προκύπτει ἡ ἐξασθένηση ἀνά μονάδα μήκους:

$$A_t = \frac{\Delta L}{\Delta x} = 8{,}686\,\alpha_t \quad \left(\frac{dB}{m}\right) \qquad (5\text{-}98)$$

Ὁ ὁλικός συντελεστής ἐξασθένησης α_t γράφεται σάν ἄθροισμα δύο ὅρων:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_t &= \alpha_c + \alpha_d \\ \text{καί ἄρα}\quad A_t &= A_c + A_d \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}99)$$

ὅπου ὁ α_c ἀφορᾶ τήν ἐξασθένηση λόγω τῆς μή τέλειας ἀγωγιμότητας τῶν τοιχωμάτων καί ὁ α_d τήν ἐξασθένηση λόγω κακῆς ποιότητας τοῦ διηλεκτρικοῦ.

Σέ ὀρθογώνιο κυματοδηγό (w,d) καί γιά τόν κυματικό τύποTE_{mn} ἀποδείχνεται ὅτι εἶναι :

$$(\alpha_c)_{TE_{mn}} = \frac{2R_s}{dZ_d\sqrt{1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}}\left\{\left(1+\frac{d}{w}\right)\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2+\left[1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2\right]\left[\frac{\frac{d}{w}\left(\frac{d}{w}m^2+n^2\right)}{\frac{d^2}{w^2}m^2+n^2}\right]\right\} \qquad (5\text{-}100)$$

ὅπου R_s ἡ λεγόμενη ἐ π ι δ ε ρ μ ι κ ή ἀντίστάση τῶν τοιχωμάτων :

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c x_0} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \qquad (5\text{-}101)$$

(x_0 τό βάθος διείσδυσης),καί

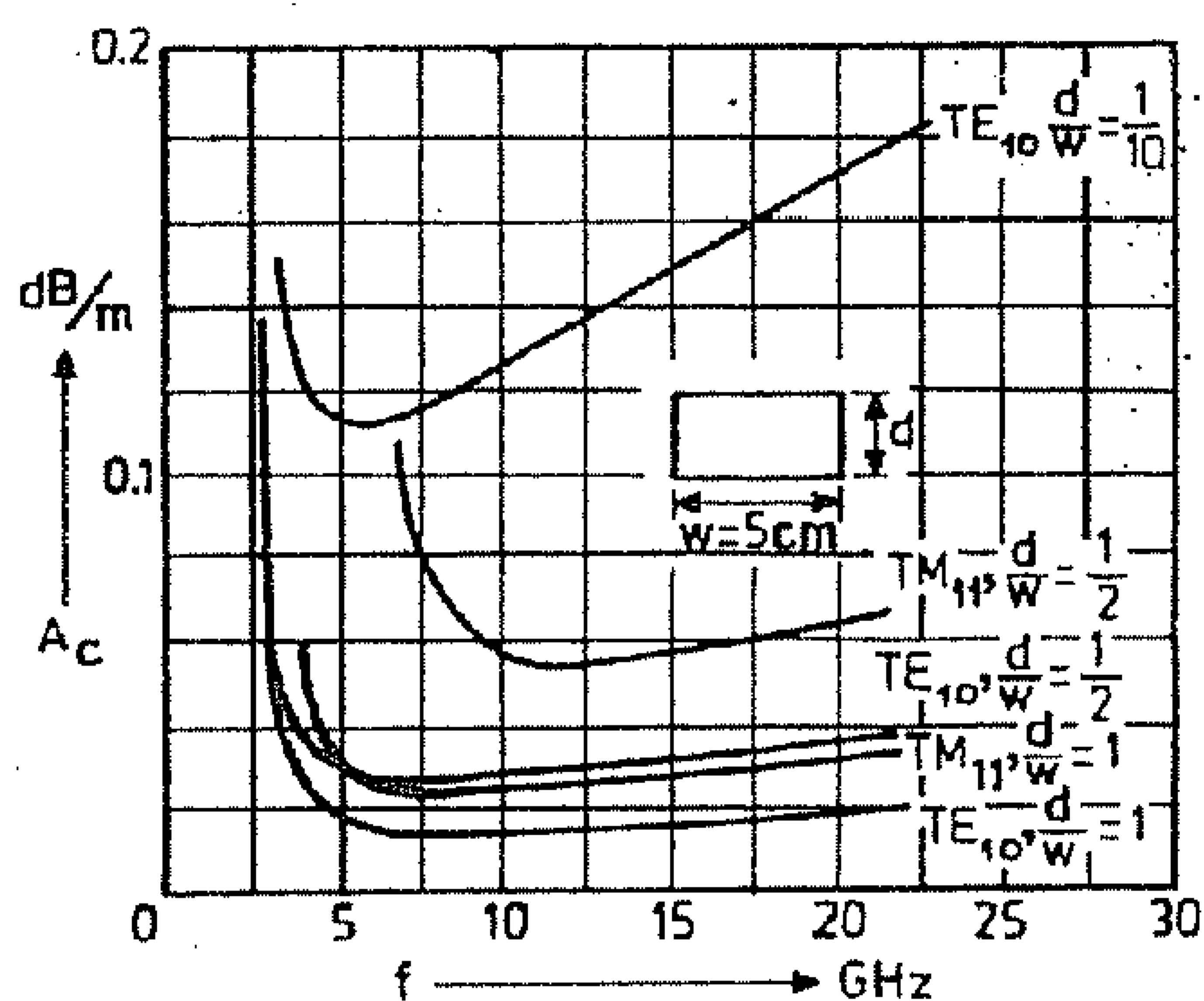
$$Z_d = \sqrt{\frac{\mu_d}{\varepsilon_d}} \qquad (5\text{-}102)$$

ἡ κυματική ἀντίσταση τοῦ διηλεκτρικοῦ.

Ὁ συντελεστής ἐξασθένησης α_d ἀποδείχνεται ὅτι γιά κάθε τύπο κυματοδηγοῦ εἶναι :

$$\alpha_d = \frac{\sigma_d Z_d}{2\sqrt{1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \qquad (5\text{-}103)$$

Μερικά παραδείγματα ἐξασθένησης μέσα σέ ὀρθογώνιο κυματοδηγό φαίνονται στό διάγραμμα τοῦ σχ. 5-6 .



Σχ. 5-6 Διαγράμματα τῆς ἐξασθένησης ἀνά μονάδα μήκους, $A_c(dB/_m)$ μερικῶν κυματικῶν τύπων ἑνός ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ, μέ W=5cm , γιά διάφορα d, σέ συνάρτηση μέ τή συχνότητα Ὁ κυματοδηγός αὐτός εἶναι ἀπό χαλκό .

5.3. Μελέτη Κυκλικού Κυλινδρικού Κυματοδηγού.

Στόν κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό, μέ έργασία άνάλογη μέ έκείνη , πού κάμαμε στή μελέτη τοῦ όρθογώνιου κυματοδηγοῦ, καταλήγουμε στό ὅτι γιά τόν έγκάρσιο ήλεκτρικό κυματικό τύπο (TE) , ὅλες οἱ συνιστῶσες τοῦ πεδίου μποροῦν νά έκφραστοῦν σέ συνάρτηση μέ τήν H_z , πού ἱκανοποιεῖ τήν έξίσωση :

$$\nabla_T^2 \mathcal{H}_z + k_c^2 \mathcal{H}_z = 0 \qquad (5\text{-}104)$$

ένῶ γιά τόν κυματικό τύπο TM ὅλες οἱ συνιστῶσες μποροῦν νά έκφραστοῦν σέ συνάρτηση μέ τήν E_x , πού πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τήν έξίσωση :

$$\nabla_T^2 \mathcal{E}_z + k_c^2 \mathcal{E}_z = 0 \qquad (5\text{-}105)$$

ὅπου εἶναι :

$$\mathcal{H}_z = \mathcal{H}_0' \cdot U(\rho, \varphi) \qquad (5\text{-}106)$$

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0' \cdot U(\rho, \varphi) \qquad (5\text{-}107)$$

Ἄν οἱ προβολές αὐτές πολλαπλασιαστοῦν έπί τόν παράγοντα $e^{-\gamma z}$ δίνουν τίς φασικές συνιστῶσες τῶν πεδίων κατά τόν ἄξονα z τῆς διάδοσης. Ἡ σταθερά τῆς διάδοσης εἶναι :

$$\gamma = j\beta \qquad (5\text{-}108)$$

Ὥστε, γενικά, κι έδῶ καταλήγουμε στή λύση τῆς διαφορικῆς έξίσωσης :

$$\nabla_T^2 U + k_c^2 U = 0 \qquad (5\text{-}109)$$

ὅπου

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{\upsilon^2} + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{\upsilon^2} - \beta^2 \qquad (5\text{-}110)$$

Στίς κυλινδρικές συντεταγμένες εἶναι :

$$\nabla_T^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \qquad (5\text{-}111)$$

Ὥστε ἡ (5-109) γράφεται:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k_c^2 U = 0 \qquad (5\text{-}112)$$

Λύνουμε τήν (5-112) (βλ.παράρτημα I) καί ἀπό τίς (5-106),(5-107) προσδιορίζουμε τήν H_z ἤ τήν E_z . Οἱ ὑπόλοιπες συνιστῶσες προσδιορίζονται ἀπό αὐτές ἄν χρησιμοποιηθοῦν οἱ σχέσεις :

$$\mathcal{E}_\rho = -\frac{1}{k_c^2}\left[\gamma \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \rho} + \frac{j\omega\mu}{\rho}\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial \varphi}\right]$$

$$\mathcal{E}_\varphi = \frac{1}{k_c^2}\left[-\frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \varphi} + j\omega\mu \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial \rho}\right]$$

$$\mathcal{H}_\varphi = \frac{1}{k_c^2}\left[\frac{j\omega\varepsilon}{\rho}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \varphi} - \gamma \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial \rho}\right] \qquad (5\text{-}113)$$

$$\mathcal{H}_\varphi = -\frac{1}{k_c^2}\left[j\omega\varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \rho} + \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial \varphi}\right]$$

πού εἶναι ἡ λύση τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell στίς κυλινδρικέςσυντεταγμένες καί εἶναι ἀνάλογες μέ τίς (5-29)τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων.

Ὅπως ἀναφέρεται στό παράρτημα I ἡ λύση τῆς (5-112) γιά κάθε τιμή τοῦ n εἶναι :

$$\boxed{U_n = U_0 J_n(k_c \rho)} \cos n\varphi \qquad (5\text{-}114)$$

'Ανατρέχοντας στίς (5-106), (5-107) ένσωματώνουμε τή σταθερά U_o στίς H_o', E_o' καί έχουμε :

$$\mathcal{H}_z = \mathcal{H}_0 J_n(k_c\rho)\cos n\varphi \qquad (5\text{-}115)$$

ή

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 J_n(k_c\rho)\cos n\varphi \qquad (5\text{-}116)$$

'Από τίς (5-115) καί (5-116) καί χρησιμοποιώντας καί τίς (5-113) προσδιορίζουμε καί τίς ύπόλοιπες συνιστῶσες.
Τά άποτελέσματα γιά τόν κάθε κυματικό τύπο (TM) καί (TE) φαίνονται στόν παρακάτω πίνακα 5-I .

ΠΙΝΑΚΑΣ 5-I

ΚΥΜΑΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΜ	ΚΥΜΑΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΕ
$\mathcal{H}_\rho = -j\dfrac{n\lambda_{op}}{k_c Z\rho\lambda}\mathcal{E}_0 J_n(k_c\rho)\sin n\varphi\, e^{j(\omega t-\beta z)}$	$\mathcal{E}_\rho = j\dfrac{nZ\lambda_{op}}{k_c\rho\lambda}\mathcal{H}_0 J_n(k_c\rho)\sin n\varphi\, e^{j(\omega t-\beta z)}$
$\mathcal{H}_\varphi = -j\dfrac{\lambda_{op}}{\lambda Z}\mathcal{E}_0 J_n'(k_c\rho)\cos n\varphi\, e^{j(\omega t-\beta z)}$	$\mathcal{E}_\varphi = jZ\dfrac{\lambda_{op}}{\lambda}\mathcal{H}_0 J_n'(k_c\rho)\cos n\varphi\, e^{j(\omega t-\beta z)}$
$\mathcal{H}_z = 0$	$\mathcal{E}_z = 0$
$\mathcal{E}_\rho = \mathcal{H}_\varphi Z_{TM}$	$\mathcal{H}_\rho = -\dfrac{\mathcal{E}_\varphi}{Z_{TE}}$
$\mathcal{E}_\varphi = -\mathcal{H}_\rho Z_{TM}$	$\mathcal{H}_\varphi = \dfrac{\mathcal{E}_\rho}{Z_{TE}}$
$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 J_n(k_c\rho)\cos n\varphi\, e^{j(\omega t-\beta z)}$	$\mathcal{H}_z = \mathcal{H}_0 J_n(k_c\rho)\cos n\varphi\, e^{j(\omega t-\beta z)}$

όπου

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (5\text{-}117)$$

ἡ κυματική ἀντίσταση τοῦ διηλεκτρικοῦ,

$$\gamma = j\beta = j\sqrt{\frac{\omega^2}{\upsilon^2} - k_c^2} \qquad (5\text{-}118)$$

ἡ σταθερά τῆς διάδοσης,

$$\lambda_\kappa = \frac{2\pi}{\beta} \qquad (5\text{-}119)$$

τό μῆκος κύματος μέσα στόν κυματοδηγό,

$$\frac{1}{\lambda_\kappa^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{op}^2} \qquad (5\text{-}120)$$

λ_{op} τό ὁρικό μῆκος κύματος

$$\lambda_{op} = \frac{2\pi}{k_c} \qquad (5\text{-}121)$$

καί

$$Z_{TM} = Z\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2} \qquad (5\text{-}122)$$

$$Z_{TE} = \frac{Z}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2}} \qquad (5\text{-}123)$$

ἡ κυματική ἀντίσταση τοῦ κυματοδηγοῦ στήν κάθε περίπτωση.

Θά προσδιορίσουμε τώρα τό k_c στήν περίπτωση τοῦ κυματικοῦ τύπου TM καί τοῦ κυματικοῦ τύπου TE .

5.3.1. Κυματικός τύπος TM.

Γι' αὐτόν τόν κυματικό τύπο ἡ ὁριακή συνθήκη τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἶναι :

$$E_\varphi=0 \;,\; E_z=0 \quad \text{γιά } \rho=\alpha \qquad (5\text{-}124)$$

ὅπου α ἡ ἀκτίνα τοῦ κυλινδρικοῦ κυματοδηγοῦ, ἐνῶ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου :

$$H_\rho=0 \quad \text{γιά } \rho=\alpha \qquad (5\text{-}125)$$

Ἐφαρμόζοντας τίς συνθῆκες (5-124) καί (5-125) στίς κατάλληλες σχέσεις τοῦ πίνακα 5-I ὁδηγούμαστε στή συνθήκη :

$$J_n\,(k_c\alpha)=0$$

Ἄρα τό γινόμενο $k_c\alpha$ πρέπει νά εἶναι ρίζα τῆς $J_n(\upsilon)$. Ἡ $J_n(\upsilon)$ ὅμως ἔχει ἄπειρο ἀριθμό ριζῶν. Ἔστω p_{nl} ἡ l τάξης ρίζα τῆς $J_n(\upsilon)$ τότε τό ἀντίστοιχο k_c εἶναι :

$$\boxed{(k_c)_{TMnl}=\frac{p_{nl}}{\alpha}} \tag{5-126}$$

Γιά κάθε ζευγάρι n,l ἀντιστοιχεῖ καί ἕνα $(k_c)_{nl}$ καί ἐπομένως κι ἕνα ὁρικό μῆκος κύματος:

$$\lambda_{TMnl,op}=\frac{2\pi}{(k_c)_{nl}} \tag{5-127}$$

Οἱ διάφοροι αὐτοί κυματικοί τύποι χαρακτηρίζονται ὡς TM_{nl} (ἤ E_{nl}). Ὥστε γιά τόν κυματικό τύπο TM_{nl} εἶναι:

$$\boxed{\lambda_{TMnl,op}=\frac{2\pi\alpha}{p_{nl}}} \tag{5-128}$$

Ἡ ὁρική συχνότητα τοῦ τύπου αὐτοῦ εἶναι :

$$\boxed{f_{TMnl,op}=\frac{p_{nl}}{2\pi\alpha\sqrt{\varepsilon\mu}}} \tag{5-129}$$

Μελετώντας τίς σχέσεις τοῦ πίνακα 5-I καταλαβαίνουμε τή σημασία τῶν ἀκεραίων n καί l. Ὁ ἀριθμός n ἐκφράζει πόσες πλήρεις διακυμάνσεις τοῦ πεδίου συμβαίνουν ἄν ἀκολουθήσουμε ἕναν κύκλο (μέ τυχαία ἀκτίνα) τῆς διατομῆς τοῦ κυματοδηγοῦ, ἐνῶ ὁ l ἐκφράζει πόσες πλήρεις διακυμάνσεις τοῦ πεδίου συμβαίνουν ἄν ἀκολουθήσουμε μιά ὁποιαδήποτε διάμετρο τῆς διατομῆς τοῦ κυματοδηγοῦ.

Μερικές ρίζες τῆς συνάρτησης Bessel $J_n(\upsilon)$ καθώς καί τῆς πρώτης παραγώγου της $J_n'(\upsilon)$ δίνονται στόν πίνακα III τοῦ Παραρτήματος .

5.3.2. Κυματικός τύπος TE.

Ἡ ὁριακή συνθήκη γι' αὐτόν τόν κυματικό τύπο εἶναι, γιά τό ἠλεκτρικό πεδίο :

$$\left[E_{\varphi}\right]_{\rho=\alpha}=0 \qquad (5\text{-}130)$$

ἐνῶ γιά τό μαγνητικό πεδίο:

$$\left[H_{\rho}\right]_{\rho=\alpha}=0 \qquad (5\text{-}131)$$

Ἐφαρμόζοντας τίς (5-130), (5-131) στίς κατάλληλες σχέσεις τοῦ πίνακα 5-I ὁδηγούμαστε στή συνθήκη:

$$J_n'(k_c\alpha)=0$$

Ὥστε τό γινόμενο $k_c\alpha$ πρέπει νά εἶναι ρίζα τῆς παραγώγου τῆς συνάρτησης Bessel πρώτου εἴδους ($J_n'(\upsilon)$). Στόν πίνακα III τοῦ Παραρτήματος. Περιλαμβάνονται μερικές ρίζες τῆς $J_n'(\upsilon)$, ἀπό τόν ἄπειρο ἀριθμό ριζῶν πού διαθέτει. Ἔστω p_{nl}' ἡ l-τάξης ρίζα τῆς $J_n'(\upsilon)$ Τότε τό ἀντίστοιχο k_c εἶναι :

$$\boxed{(k_c)_{TE\,nl}=\frac{p_{nl}'}{\alpha}} \qquad (5\text{-}132)$$

Γιά κάθε ζευγάρι, λοιπόν, ἀκεραίων n,l ἀντιστοιχεῖ κι ἕνας ἐγκάρσιος ἠλεκτρικός κυματικός τύπος TE_{nl} (H_{nl}) μέ ὁρικό μῆκος κύματος :

$$\boxed{\lambda_{TEnl,op}=\frac{2\pi}{(k_c)_{nl}}=\frac{2\pi\alpha}{p_{nl}'}} \qquad (5\text{-}133)$$

οἱ ἀριθμοί n καί l ἔχουν τήν ἴδια φυσική σημασία πού ἀναφέραμε στό α προηγουμένως.

Ἡ ὁρική συχνότητα τοῦ τύπου αὐτοῦ εἶναι:

$$f_{TEnl,op} = \frac{p'_{nl}}{2\pi a \sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad (5\text{-}134)$$

Στόν πίνακα 5-II δίνονται οἱ πεδιακές κατανομές καί ὁρισμένα βασικά στοιχεῖα μερικῶν κυματικῶν τύπων τοῦ κυκλικοῦ κυματόδηγοῦ.

5.3.3. Ἐξασθένηση τοῦ κύματος κατά τή διάδοση μέσα ἀπό κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό.

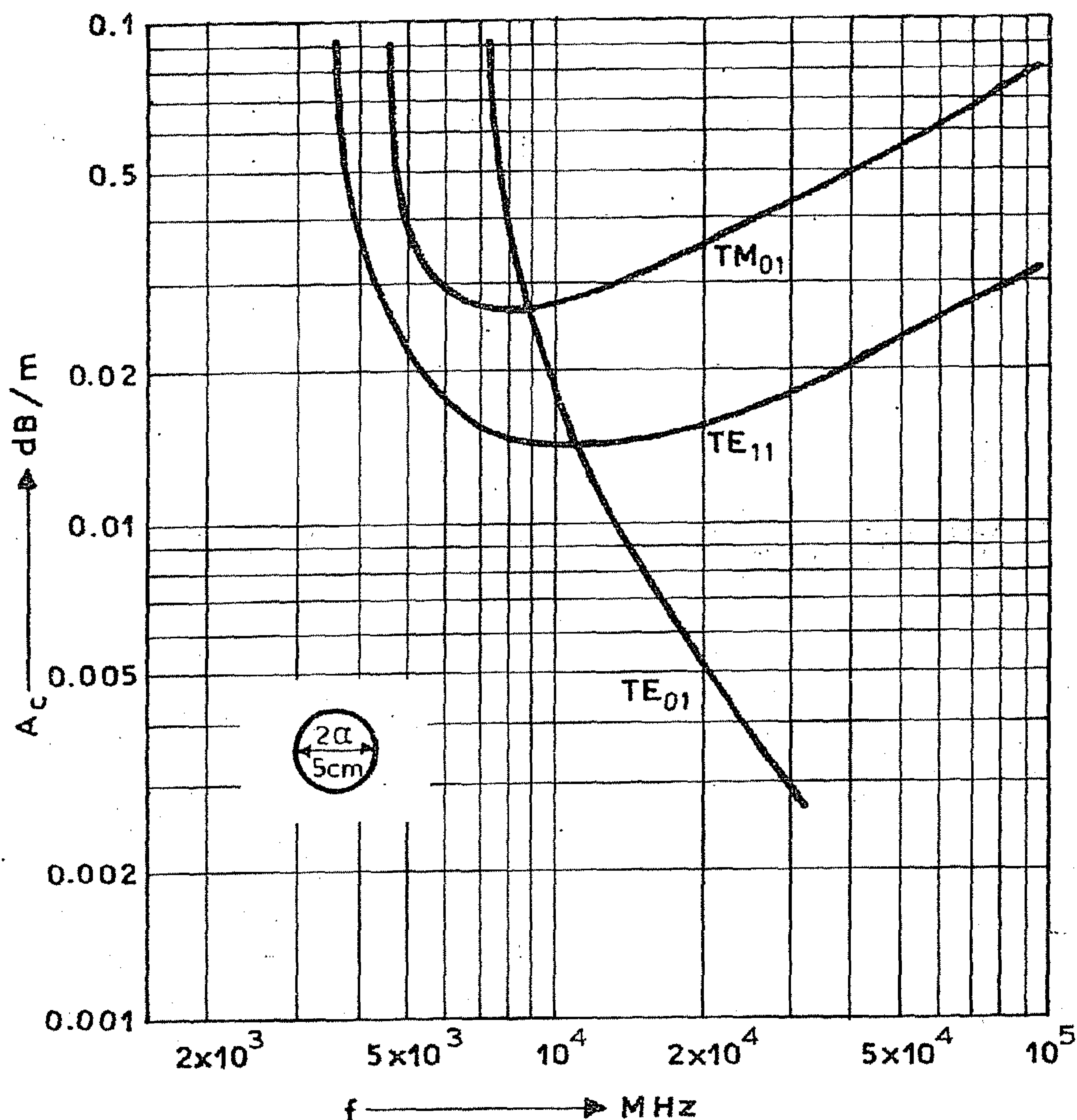
Ὅπως στόν ὀρθογώνιο κυματοδηγό ἔτσι καί στόν κυκλικό ἡ ἐξασθένηση κατά τή διάδοση ὀφείλεται στήν πεπερασμένη τιμή τῆς εἰδικῆς ἀγωγιμότητας τοῦ μετάλλου τῶν τοιχωμάτων καί στήν κακή ποιότητα τοῦ διηλεκτρικοῦ (μή τέλειο διηλεκτρικό). Ὁ συντελεστής ἐξασθένησης a_d, πού ὀφείλεται στό δεύτερο παράγοντα, δίνεται κι' ἐδῶ ἀπό τή σχέση (5-103) :

$$a_d = \frac{\sigma_d Z_d}{2\sqrt{1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \qquad (5\text{-}103)$$

πού εἶναι κοινή γιά ὅλους τούς κυματοδηγούς καί ὅλους τούς κυματικούς τύπους. Ὁ συντελεστής ἐξασθένησης a_c πού ὀφείλεται στήν πεπερασμένη ἀγωγιμότητα τῶν τοιχωμάτων εἶναι γιά τούς τύπους TM_{nl} καί TE_{nl}, ἀντίστοιχα :

$$a_{TMnl} = \frac{R_s}{a Z_d\sqrt{1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \qquad (5\text{-}135)$$

$$a_{TEnl} = \frac{R_s}{a Z_d\sqrt{1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}}\left[\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2 + \frac{n^2}{p'^2_{nl} - n^2}\right] \qquad (5\text{-}136)$$



Σχ. 5-7 Διάγραμμα τῆς ἐξασθένησης ἀνά μονάδα μήκους A_c(dB/m) τριῶν κυματικῶν τύπων ἑνός κενοῦ χάλκινου κυκλικοῦ κυματοδηγοῦ μέ διάμετρο 5 cm .

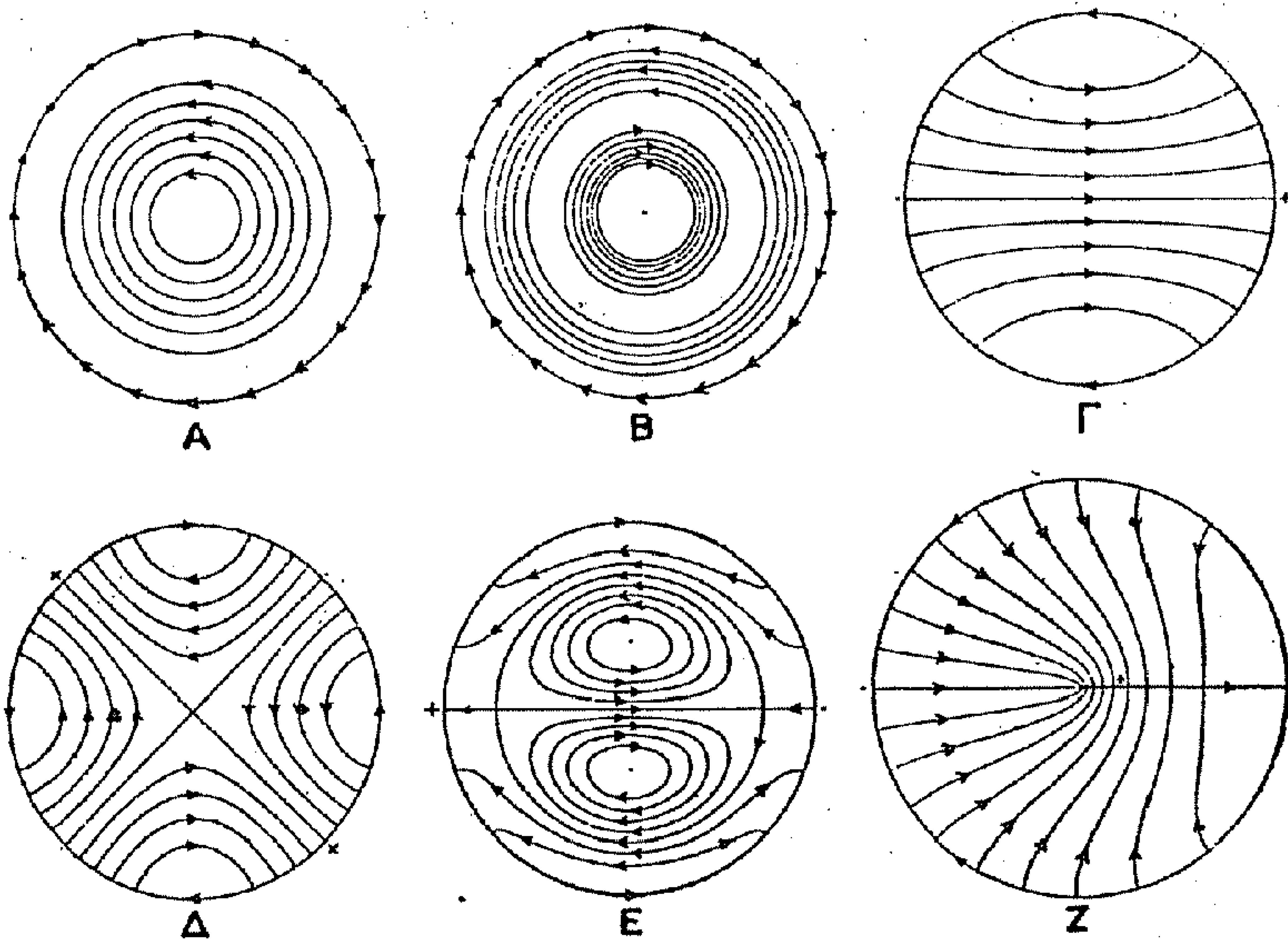
Στό σχῆμα 5-7 δίνουμε τό διάγραμμα τῆς ἐξασθένησης ἀνά μονάδα μήκους (A_c) σέ συνάρτηση μέ τή συχνότητα (f)γιά τούς τρεῖς πρώτους κυματικούς τύπους ἑνός κενοῦ χάλκινου κυκλικοῦ κύματο - δηγοῦ μέ διάμετρο 5 cm .

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ TE_{01} , πάνω ἀπό 11 GH_z (περίπου), ἐμφανίζει τή μικρότερη ἐξασθένηση, πού μάλιστα μικραίνει ὅσο μεγαλώνει ἡ συχνότητα. Αὐτός εἶναι ὁ λόγος, πού ὁ κυματικός αὐτός τύπος χρησιμοποιεῖται συχνά στήν πράξη.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5-ΙΙ

Πεδιακή Κατανομή καί Βασικά Στοιχεῖα μερικῶν Κυματικῶν Τύπων τοῦ Κυκλικοῦ Κυματοδηγοῦ

TM_{01}	TM_{02}	TM_{11}	TE_{01}	TE_{11}
		Distributions Below Along This Plane		
$E_z, E_r, H_\phi \neq 0$	$E_z, E_r, H_\phi \neq 0$	$E_z, E_r, E_\phi, H_r, H_\phi \neq 0$	$H_z, H_r, E_\phi \neq 0$	$H_z, H_r, H_\phi, E_r, E_\phi \neq 0$
$p_{01} = 2{,}405$	$p_{02} = 5{,}52$	$p_{11} = 3{,}83$	$p'_{01} = 3{,}83$	$p'_{11} = 1{,}84$
$k_c = \frac{2{,}405}{a}$	$k_c = \frac{5{,}52}{a}$	$k_c = \frac{3{,}83}{a}$	$k_c = \frac{3{,}83}{a}$	$k_c = \frac{1{,}84}{a}$
$\lambda_{op} = 2{,}61a$	$\lambda_{op} = 1{,}14a$	$\lambda_{op} = 1{,}64a$	$\lambda_{op} = 1{,}64a$	$\lambda_{op} = 3{,}41a$
$f_{op} = \frac{0{,}383}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$f_{op} = \frac{0{,}877}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$f_{op} = \frac{0{,}609}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$f_{op} = \frac{0{,}609}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$	$f_{op} = \frac{0{,}293}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$



Κατανομή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου σέ ὁρισμένους κυματικούς τύπους TE κυκλικοῦ κυματοδηγοῦ. Ἡ πυκνότητα τῶν δυναμικῶν γραμμῶν δείχνει τό πλάτος τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

A: κυματικός τύπος TE_{01}

B: " " TE_{02}

Γ: " " TE_{11}

Δ: " " TE_{21}

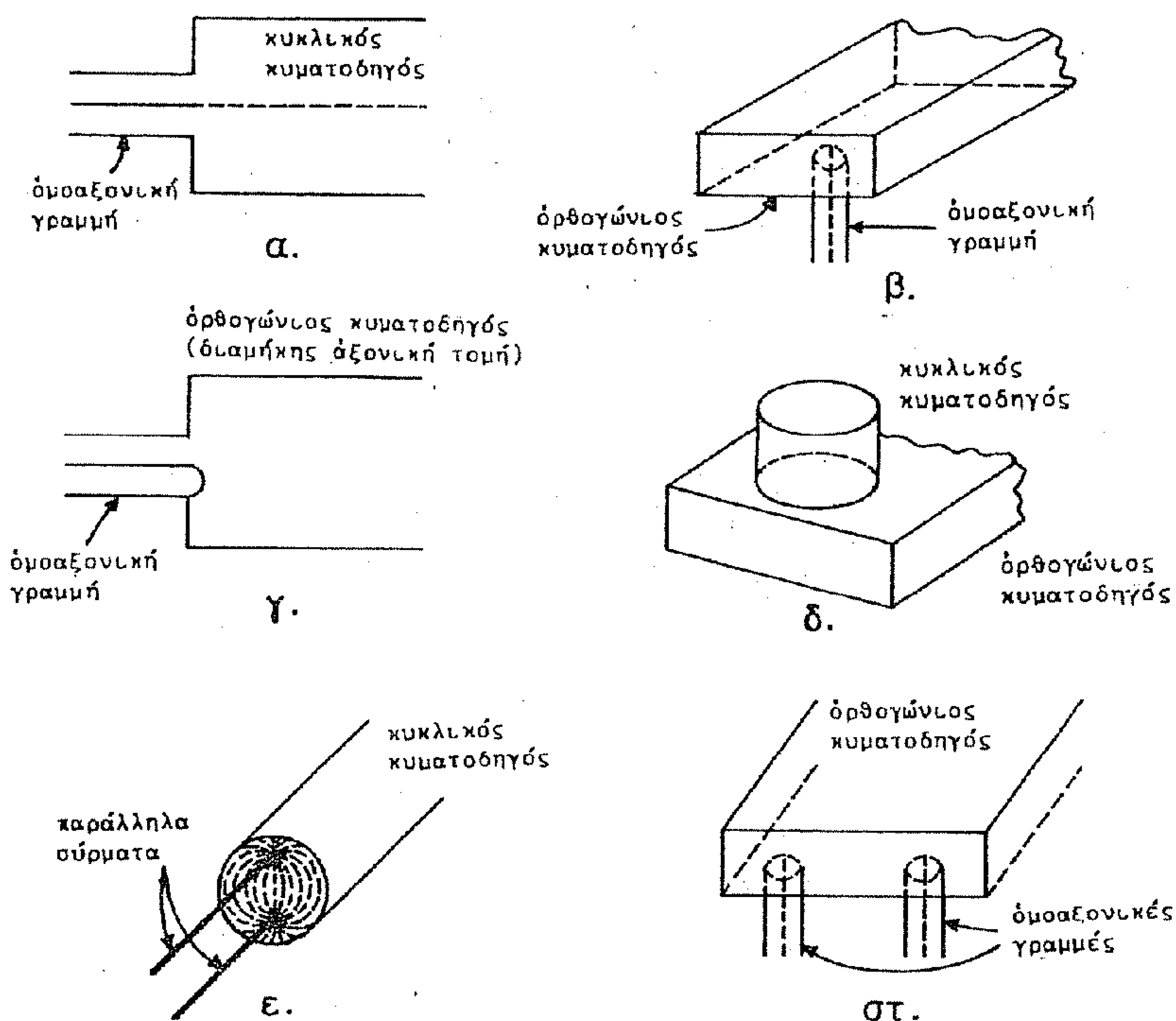
E: " " TE_{12}

Z: " " $TE_{1/2,1}$

ἐπισημαίνεται ὅτι ἡ περίπτωση Z ἀντιστοιχεῖ στόν " κλασματικό " κυματικό τύπο $TE_{1/2,1}$

5.4. Τρόποι Διέγερσης καί Λήψης τοῦ Σήματος στούς Κυματοδηγούς.

Στό παρακάτω σχῆμα δίνονται μερικοί τρόποι "διέγερσης" τοῦ κυματοδηγοῦ, εἰσαγωγῆς δηλαδή τοῦ σήματος, πού θέλουμε νά κυματοδηγηθεῖ. Οἱ ἴδιοι τρόποι ἰσχύουν ἀντίστροφα γιά τή λήψη τοῦ σήματος στό τέρμα τοῦ κυματοδηγοῦ.



Σχ. 5-8

α. Διέγερση τοῦ τύπου TM_{01} σέ κυκλικό κυματοδηγό

β. " " " TE_{10} σέ ὀρθογώνιο "

γ. " " " TE_{10} σέ " "

δ. Σύζευξη κυκλικοῦ (TM_{01})καί ὀρθογώνιου (TE_{10})κυματ/γοῦ.

ε. Διέγερση τοῦ τύπου TM_{11} σέ κυκλικό κυματοδηγό

στ. " " " TE_{20} σέ ὀρθογώνιο "

5.5. Ἠλεκτρομαγνητικά Ἀντηχεῖα.

Τά ἠλεκτρομαγνητικά ἀντηχεία (resonant cavities ἤ cavity resonators) εἶναι ἐπέκταση τῶν συντονιζόμενων κυκλωμάτων L - C στίς πολύ ὑψηλές ἠλεκτρομαγνητικές συχνότητες καί εἶναι κλειστές κοιλότητες μέ ἀγώγιμα τοιχώματα.

Τά συνηθισμένα συντονιζόμενα κυκλώματα,μέ ἐντοπισμένες σταθερές L καί C,εἶναι ἀκατάλληλα γιά τίς πολύ ὑψηλές συχνότητες (π.χ. γιά μήκη κύματος $\lambda < 1m$) ἐπειδή ἔχουν μεγάλες ἀπώλειες γιατί ἀκτινοβολοῦν ἐνέργεια στό γύρω χῶρο καί γιατί ἡ ἀντιστασή τους, λόγω τοῦ ἐπιδερμικοῦ φαινομένου, εἶναι πολύ μεγάλη, παράγοντες ποῦ ὁδηγοῦν στή μείωση τοῦ συντελεστῆ ποιότητας Q .

Μέ κατάλληλη διέγερση, μέσα στά ἠλεκτρομαγνητικά ἀντηχεῖα ἀναπτύσσονται σ τ ά σ ι μ ο ι*) κ υ μ α τ ι κ ο ί τύποι (resonant modes), πού εἶναι ἀνάλογοι μέ τά στάσιμα ἠχητικά κύματα στά ἀκουστικά ἀντηχεῖα.

Παρακάτω θά μελετήσουμε τίς πεδιακές κατανομές τῶν στάσιμων κυματικῶν τύπων μέσα στό ὀρθογώνιο ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο καί στό κυκλικό κυλινδρικό ἀντηχεῖο.

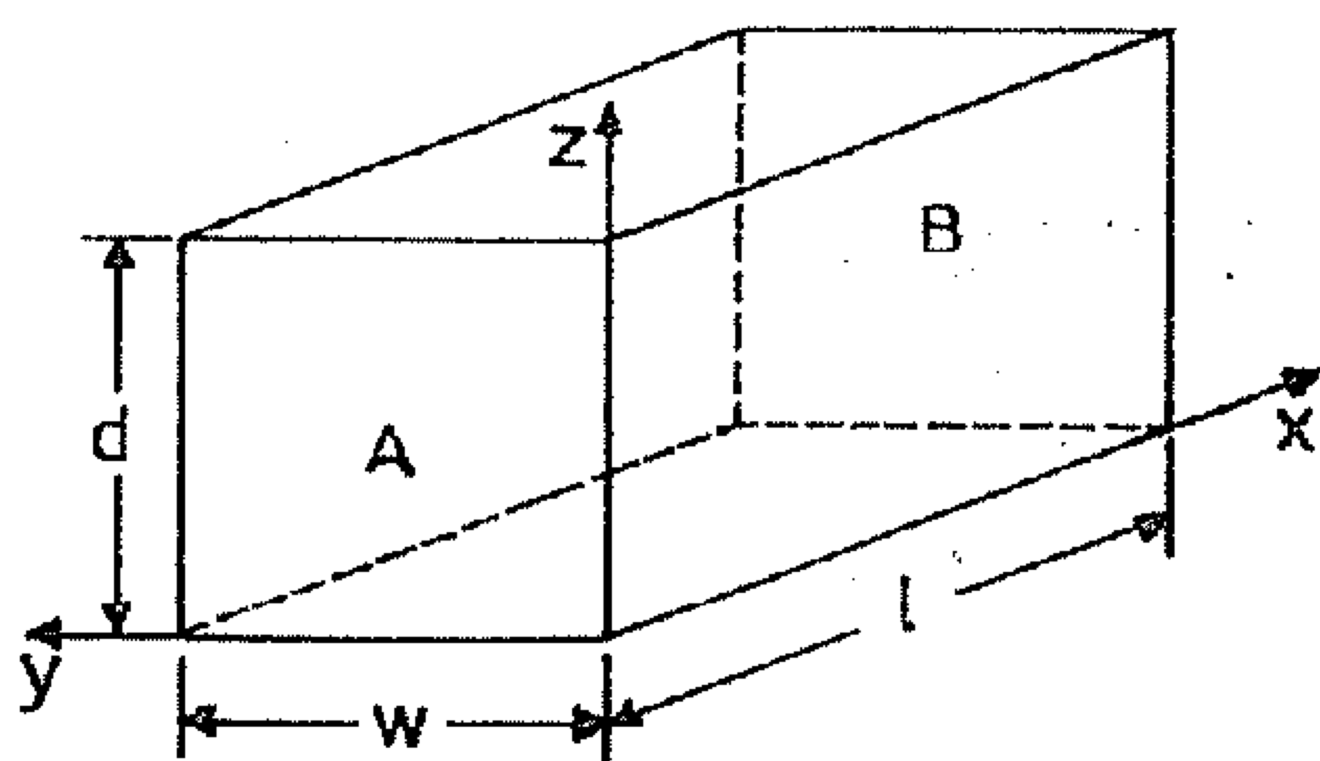
5.5.1. Τό ὀρθογώνιο ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο.

Θά μελετήσουμε τό ὀρθογώνιο ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο σάν ἕνα κομμάτι ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ μέ μῆκος l, πού τό κλείνουμε στίς δύο του ἄκρες μέ ἐπίπεδες ἀγώγιμες ἕδρες (βλ. σχ. 5-9)

Ἄς φανταστοῦμε , τώρα, ἕναν κυματικό τύπο (ΤΕ ἤ ΤΜ),πού δημιουργήθηκε μέ κάποιο τρόπο καί διαδίδεται κατά τή διεύθυνση +x

---

*) Σέ ἀντίθεση μέ τούς τ ρ έ χ ο ν τ ε ς κυματικούς τύπους, μέσα στούς κυματοδηγούς.



Σχ. 5-9 Τό ὀρθογώνιο ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο εἶναι ἕνα κομμάτι ἀπό ὀρθογώνιο κυματοδηγό κλεισμένο στίς δύο του ἄκρες μέ δύο ἐπίπεδες ἀγώγιμες ἕδρες Α καί Β .

μέσα στό ἀντηχεῖο.Τό κύμα αὐτό, ὅταν φτάσει στήν ἕδρα Β , θά ὑποστεῖ ἀνάκλαση. Τό προσπίπτον κύμα καί τό ἀνακλώμενο συμβάλλουν καί ἄν τό μῆκος l τοῦ ἀντηχείου βρίσκεται σέ ὁρισμένη σχέση μέ τό μῆκος κύματος λ_K, δημιουργοῦν στάσιμα κύματα.

Στάσιμος κυματικός τύπος TE_{mnp}

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό ἀρχικό τρέχον κύμα εἶναι τοῦ τύπου TE_{mn} δηλαδή περιγράφεται ἀπό τίς σχέσεις (5-57) ἤ τίς (5-69).

Ὥστε, μέσα στό ὀρθογώνιο ἀντηχεῖο κάθε πεδιακή συνιστῶσα θά εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα μιᾶς συνιστῶσας, πού τρέχει πρός τό +x καί μιᾶς ἄλλης, πού τρέχει πρός τό −x .

Ἀπό τήν πρώτη τῶν (5-57), προκύπτει ὅτι ἡ συνιστῶσα $\mathcal{H}_x$ τοῦ συνολικοῦ πεδίου θά εἶναι :

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_{xi} + \mathcal{H}_{xr} \qquad (5\text{-}137)$$

ὅπου $\mathcal{H}_{xi}$ καί $\mathcal{H}_{xr}$ τό προσπίπτον καί τό ἀνακλώμενο κύμα,ἀντίστοιχα, καί εἶναι :

$$\mathcal{H}_{xi} = \mathcal{H}_{oi} \cos k_y y \cos k_z z\, e^{j(\omega t - \beta x)} \qquad (5\text{-}138)$$

$$\mathcal{H}_{xr} = \mathcal{H}_{or} \cos k_y y \cos k_z z\, e^{j(\omega t + \beta x)} \qquad (5\text{-}139)$$

καί k_y καί k_z τά γνωστά μεγέθη . Ὥστε :

$$\mathcal{H}_x = (\mathcal{H}_{oi}\, e^{-j\beta x} + \mathcal{H}_{or}\, e^{j\beta x}) \cos k_y y \cos k_z z\, e^{j\omega t} \qquad (5\text{-}140)$$

'Εφαρμόζοντας τήν όριακή συνθήκη $\mathcal{H}_x=0$ στίς ἕδρες A καί B, ἔχουμε:

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_o \cos k_y y \cos k_z z \sin k_x x \, e^{j\omega t} \qquad (5-141)$$

ὅπου ἡ $\mathcal{H}_o$ εἶναι μιά μιγαδική, ἐν γένει, σταθερά καί

$$k_x \equiv \beta = \frac{p\pi}{l} \quad , \qquad p = 0,1,2,\ldots \qquad (5-142)$$

'Η (5-141) περιγράφει ἕνα στάσιμο κύμα, δηλ. μιά άρμονική ταλάντωση, μέ χωρική κατανομή πλάτους, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τά k_y , k_z καί k_x δηλ. ἀπό τήν τριάδα τῶν ἀκεραίων (m,n,p).

Μέ παρόμοια ἐργασία προσδιορίζουμε καί τίς ἄλλες συνιστῶσες, πού μαζί μέ τήν $\mathcal{H}_x$ περιγράφουν ἐντελῶς τό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο μέσα στό ἀντηχεῖο, τό ὁποῖο στήν περίπτωση αὐτή λέγεται ἐ γ κ ά ρ σ ι ο ς ἠ λ ε κ τ ρ ι κ ό ς σ τ ά σ ι μ ο ς κ υ μ α τ ι κ ό ς τ ύ π ο ς (TE_{mnp}). Ὅλες οἱ συνιστῶσες τοῦ τύπου αὐτοῦ εἶναι :

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{H}_x &= \mathcal{H}_o \cos k_y y \cos k_z z \sin k_x x \, e^{j\omega t} \\
\mathcal{H}_y &= -\frac{k_x k_y}{k_c^2} \mathcal{H}_o \sin k_y y \cos k_z z \cos k_x x \, e^{j\omega t} \\
\mathcal{H}_z &= -\frac{k_x k_z}{k_c^2} \mathcal{H}_o \cos k_y y \sin k_z z \cos k_x x \, e^{j\omega t} \\
\mathcal{E}_x &= 0 \\
\mathcal{E}_y &= \frac{j\omega\mu k_z}{k_c^2} \mathcal{H}_o \cos k_y y \sin k_z z \sin k_x x \, e^{j\omega t} \\
\mathcal{E}_z &= -\frac{j\omega\mu k_y}{k_c^2} \mathcal{H}_o \sin k_y y \cos k_z z \sin k_x x \, e^{j\omega t}
\end{aligned}\right\} \qquad (5-143)$$

ὅπου $$k_y = \frac{m\pi}{w} \quad , \quad m = 0,1,2,\dots \qquad (5\text{-}144)$$

$$k_z = \frac{n\pi}{d} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots \qquad (5\text{-}145)$$

$$k_x = \frac{p\pi}{l} \quad , \quad p = 0,1,2,\dots \qquad (5\text{-}146)$$

$$k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 \qquad (5\text{-}147)$$

καί $$\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = k_y^2 + k_z^2 + k_x^2 \qquad (5\text{-}148)$$

Στάσιμος κυματικός τύπος TM_{mnp}

Μέ παρόμοιο τρόπο, συνθέτοντας δύο τρέχοντα κύματα τύπου TM_{mn}, μπορούμε νά προσδιορίσουμε τίς συνιστῶσες τοῦ ἐ γ κ ά ρ σ ι ο υ μ α γ ν η τ ι κ ο ῦ κ υ μ α τ ι κ ο ῦ τύπου(TM_{mnp}) Οἱ συνιστῶσες αὐτές εἶναι :

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{E}_x &= \mathcal{E}_0 \sin k_y y \sin k_z z \cos k_x x\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{E}_y &= -\frac{k_x k_y}{k_c^2}\mathcal{E}_0 \cos k_y y \sin k_z z \sin k_x x\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{E}_z &= -\frac{k_x k_z}{k_c^2}\mathcal{E}_0 \sin k_y y \cos k_z z \sin k_x x\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{H}_x &= 0 \\
\mathcal{H}_y &= \frac{j\omega\varepsilon k_z}{k_c^2}\mathcal{E}_0 \sin k_y y \cos k_z z \cos k_x x\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{H}_z &= -\frac{j\omega\varepsilon k_y}{k_c^2}\mathcal{E}_0 \cos k_y y \sin k_z z \cos k_x x\, e^{j\omega t}
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}149)$$

ὅπου τά k_x , k_y, k_z καί k_c εἶναι τά μεγέθη τῶν σχέσεων (5-144) ἕως (5-148) .

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς

• Ὅπως εἶναι γνωστό, ἄν λ_K εἶναι τό μῆκος τοῦ τρέχοντος κύματος μέσα στόν κυματοδηγό ἰσχύει ἡ σχέση :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_\kappa} \qquad \text{ἤ} \qquad k_x = \frac{2\pi}{\lambda_\kappa} \tag{5-150}$$

Ὥστε, ἐξαιτίας καί τῆς (5-146), εἶναι:

$$\frac{2\pi}{\lambda_\kappa} = \frac{p\pi}{l}$$

ἤ

$$\boxed{l = p\,\frac{\lambda_\kappa}{2}} \tag{5-151}$$

Ἡ σχέση αὐτή, ὅπως βλέπουμε, εἶναι ἴδια μέ τή συνθήκη στάσιμων κυμάτων σέ κλειστό ἠχητικό σωλήνα.

• Οἱ σχέσεις (5-143) καί (5-149) περιγράφουν στάσιμα ἠλεκτρομαγνητικά κύματα . Ἡ κυκλική τους συχνότητα ω καθορίζεται ἀπό τήν ἐξίσωση (5-148) πού γράφεται :

$$\frac{\omega^2}{\upsilon^2} = \left(\frac{m\pi}{w}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \tag{5-152}$$

δηλαδή ἀπό τίς διαστάσεις τοῦ ὀρθογώνιου ἀντηχείου καί ἀπό τούς ἀκεραίους m,n,p, πού καθορίζουν τήν τάξη τοῦ στάσιμου κυματικοῦ τύπου. Οἱ κυματικοί τύποι μέ μεγαλύτερη τάξη ἔχουν καί μεγαλύτερες συχνότητες συντονισμοῦ. Ἡ (5-152) ὁδηγεῖ στό μῆκος κύματος συντονισμοῦ ἤ στή συχνότητα συντονισμοῦ:

$$\frac{1}{\lambda_{mnp}} = \sqrt{\left(\frac{m}{2w}\right)^2 + \left(\frac{n}{2d}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}$$

ή $$f_{mnp} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(\frac{m\pi}{w}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}{\varepsilon\mu}} \qquad (5\text{-}153)$$

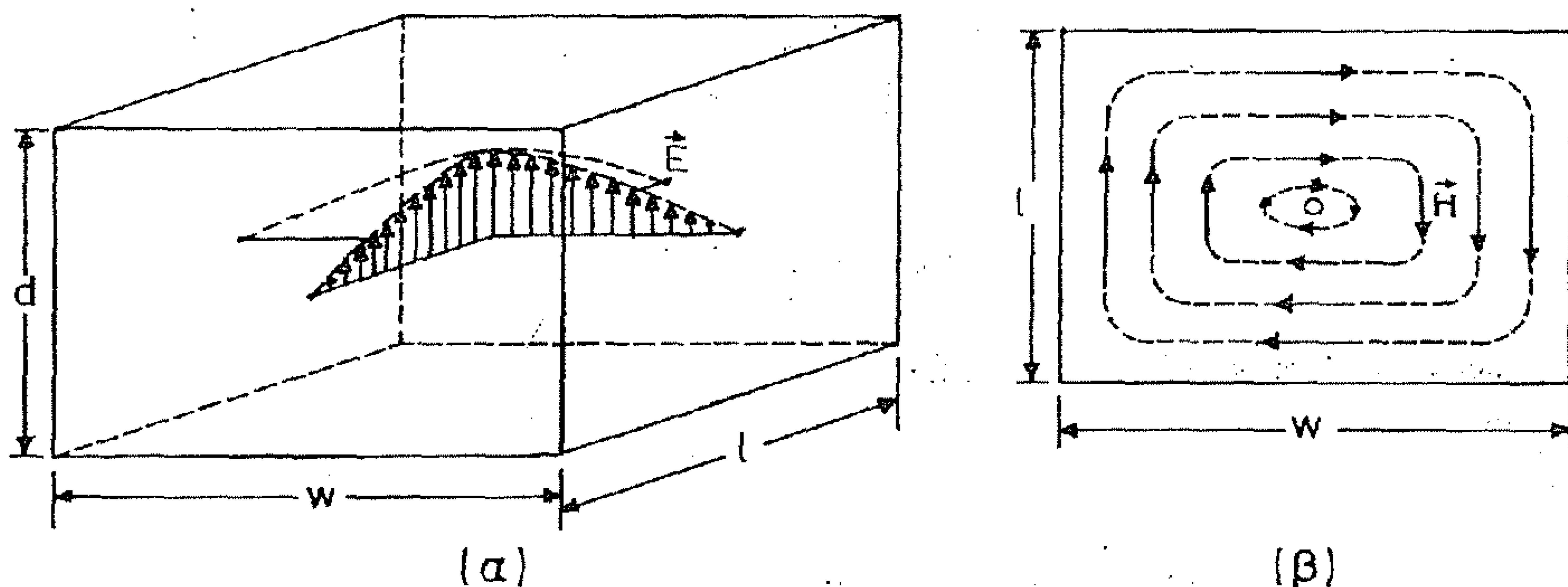
• Οἱ κυματικοί τύποι TE_{mnp} καί TM_{mnp} ,μέ τίς ἴδιες τιμές ἀκεραίων m,n καί p, παρόλο πού ἔχουν διαφορετικές πεδιακές κατανομές ἔχουν τίς ἴδιες συχνότητες συντονισμοῦ. Τέτοιοι κυματικοί τύποι,λέγονται ἐ κ φ υ λ ι σ μ έ ν ο ι τ ύ π ο ι (degenerate modes). Ἐκφυλισμός συμβαίνει καί μέσα στήν ἴδια κατηγορία, λόγου χάρη τήν TE, ὅταν δύο ἤ καί ὅλες οἱ διαστάσεις τοῦ ἀντηχείου εἶναι ἴσες.

Ὁ στάσιμος κυματικός τύπος TE_{101} σέ ὀρθογώνιο ἀντηχεῖο

Ὁ τύπος αὐτός, εἶναι ὁ ἁπλούστερος στάσιμος κυματικός τύπος τοῦ ὀρθογώνιου ἀντηχείου καί περιγράφεται ἀπό τίς παρακάτω ἐξισώσεις, πού εἶναι μερική περίπτωση τῶν (5-143) γιά m=1 ,n=0 καί p=1 :

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{H}_x &= \mathcal{H}_o \cos\frac{\pi y}{w}\sin\frac{\pi x}{l}\,e^{j\omega t}\\
\mathcal{H}_y &= -\frac{w}{l}\mathcal{H}_o \sin\frac{\pi y}{w}\cos\frac{\pi x}{l}\,e^{j\omega t}\\
\mathcal{H}_z &= 0\\
\mathcal{E}_x &= \mathcal{E}_y = 0\\
\mathcal{E}_z &= -\frac{j\omega\mu w\mathcal{H}_o}{\pi}\sin\frac{\pi y}{w}\sin\frac{\pi x}{l}\,e^{j\omega t}
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}154)$$

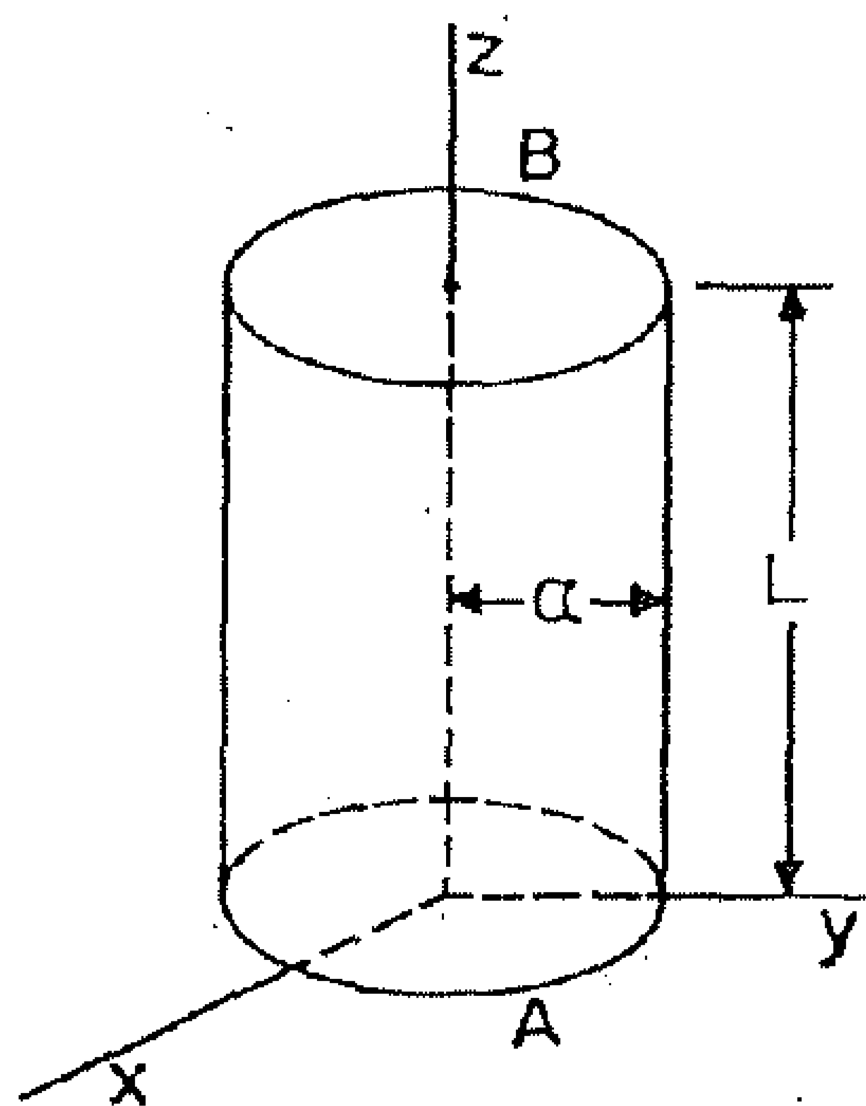
Στό σχ. 5-10 φαίνονται δύο παραστατικές ὄψεις τῆς πεδιακῆς κατανομῆς τοῦ στάσιμου κυματικοῦ τύπου TE_{101} μέσα στό ὀρθογώνιο ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο.



Σχ. 5-10 Τό ἠλεκτρικό (α) καί τό μαγνητικό (β) πεδίο τοῦ στάσιμου κυματικοῦ τύπου TE_{101} στό ὀρθογώνιο ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο.

5.5.2. Τό κυκλικό κυλινδρικό ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο.

Θά μελετήσουμε καί τό κυκλικό κυλινδρικό ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο, σάν ἕνα κομμάτι ἀπό κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό, πού τό ἔχουμε σφραγίσει στίς δυό του ἄκρες μέ ἐπίπεδες ἀγώγιμες βάσεις (βλ.σχ. 5-11) .



Σχ. 5-11 Τό κυκλικό κυλινδρικό ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο εἶναι ἕνα κομμάτι ἀπό κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό κλεισμένο στίς δύο του ἄκρες μέ δύο ἐπίπεδες ἀγώγιμες ἕδρες Α καί Β.

Στάσιμος κυματικός τύπος TE_{nlq}

Ἄς φανταστοῦμε μέσα στό ἀντηχεῖο ἕνα τρέχον κῦμα τοῦ τύπου TE_{nl} , ἕνα κῦμα δηλαδή, πού περιγράφεται ἀπό τίς ἐξισώσεις τῆς δεξιᾶς στήλης τοῦ πίνακα 5-I .

Τό ἀνακλώμενο στή βάση Β κύμα συμβάλλει μέ τό ἀρχικό καί σχηματίζει στάσιμο κύμα. Ἔτσι γιά τή συνιστῶσα $\mathcal{H}_z$ θά ἔχουμε:

$$\mathcal{H}_z = \mathcal{H}_{zi} + \mathcal{H}_{zr} \tag{5-155}$$

ὅπου

$$\mathcal{H}_{zi} = \mathcal{H}_{oi} J_n(k_c\rho) \cos n\varphi \, e^{j(\omega t - \beta z)} \tag{5-156}$$

$$\mathcal{H}_{zr} = \mathcal{H}_{or} J_n(k_c\rho) \cos n\varphi \, e^{j(\omega t + \beta z)} \tag{5-157}$$

τό προσπίπτον καί τό ἀνακλώμενο κύμα, ἀντίστοιχα.
Ὥστε :

$$\mathcal{H}_z = (\mathcal{H}_{oi} e^{-j\beta z} + \mathcal{H}_{or} e^{j\beta z}) J_n(k_c\rho) \cos n\varphi \, e^{j\omega t} \tag{5-158}$$

Ἐφαρμόζοντας στήν (5-158) τήν ὁριακή συνθήκη $\mathcal{H}_z = 0$ πάνω στίς ἕδρες Α καί Β καταλήγουμε στή σχέση :

$$\mathcal{H}_z = \mathcal{H}_o J_n(k_c\rho) \cos n\varphi \sin k_z z \, e^{j\omega t} \tag{5-159}$$

ὅπου ἡ $\mathcal{H}_o$ εἶναι μιά μιγαδική, ἐν γένει, σταθερά καί

$$k_z \equiv \beta = \frac{q\pi}{L} \quad , \quad q = 0, 1, 2, \ldots \tag{5-160}$$

Μέ παρόμοια ἐργασία προσδιορίζονται καί οἱ ὑπόλοιπες συνιστῶσες τοῦ στάσιμου κυματικοῦ τύπου TE_{nlq} . Ὅλες οἱ συνιστῶσες τοῦ τύπου αὐτοῦ εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}_\rho &= \frac{-j k_z \mathcal{H}_o}{k_c} J_n'(k_c\rho) \cos n\varphi \sin k_z z \, e^{j\omega t} \\ \mathcal{H}_\varphi &= -\frac{n k_z}{k_c^2 \rho} \mathcal{H}_o J_n(k_c\rho) \sin n\varphi \cos k_z z \, e^{j\omega t} \end{aligned}\right\} \tag{5-161}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{H}_z &= \mathcal{H}_o J_n(k_c\rho)\cos n\varphi \sin k_z z\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{E}_\rho &= \frac{j\omega\mu n}{k_c^2\rho}\mathcal{H}_o J_n(k_c\rho)\sin n\varphi \sin k_z z\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{E}_\varphi &= \frac{j\omega\mu}{k_c}\mathcal{H}_o J_n'(k_c\rho)\cos n\varphi \sin k_z z\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{E}_z &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}161)$$

ὅπου

$$k_c = \frac{p_{nl}'}{\alpha} \quad , \; p_{nl}' \text{ ἡ } l \text{ τάξης ρίζα τῆς } J_n'(\upsilon) \qquad (5\text{-}162)$$

$$k_z = \frac{q\pi}{L} \quad , \; q = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5\text{-}163)$$

καί

$$\left(\frac{\omega}{\upsilon}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = k_c^2 + k_z^2 \qquad (5\text{-}164)$$

Οἱ σχέσεις (5-161) περιγράφουν στάσιμα ἠλεκτρομαγνητικά κύματα, πού ἡ κυκλική τους συχνότητα ω καθορίζεται ἀπό τήν(5-164) δηλ. ἀπό τίς διαστάσεις τοῦ ἀντηχείου καί ἀπό τούς ἀκεραίους n, l, καί q, πού καθορίζουν τήν τάξη τοῦ στάσιμου κυματικοῦ τύπου. Ἡ (5-164) ὁδηγεῖ στό μῆκος κύματος συντονισμοῦ καί τή συχνότητα συντονισμοῦ :

$$\frac{1}{\lambda_{nlq}'} = \sqrt{\left(\frac{p_{nl}'}{2\pi\alpha}\right)^2 + \left(\frac{q}{2L}\right)^2} \quad \text{ἤ} \quad f_{nlq}' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(\frac{p_{nl}'}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2}{\varepsilon\mu}} \qquad (5\text{-}165)$$

Στάσιμος κυματικός τύπος TM_{nlq}

Μέ παρόμοιο τρόπο, συνθέτοντας δύο τρέχοντα κύματα τοῦ τύπου TM_{nl}, μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τίς συνιστῶσες τοῦ στάσιμου κυματικοῦ τύπου TM_{nlq}. Οἱ συνιστῶσες αὐτές εἶναι :

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{E}_\rho &= -\frac{k_z}{k_c}\,\mathcal{E}_o\,J_n'(k_c\rho)\cos n\varphi \sin k_z z\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{E}_\varphi &= \frac{n k_z}{k_c^2\rho}\,\mathcal{E}_o\,J_n(k_c\rho)\sin n\varphi \sin k_z z\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{E}_z &= \mathcal{E}_o\,J_n(k_c\rho)\cos n\varphi \cos k_z z\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{H}_\rho &= -\frac{j\omega\varepsilon n}{k_c^2\rho}\,\mathcal{E}_o\,J_n(k_c\rho)\sin n\varphi \cos k_z z\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{H}_\varphi &= -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c}\,\mathcal{E}_o\,J_n'(k_c\rho)\cos n\varphi \cos k_z z\, e^{j\omega t} \\
\mathcal{H}_z &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}166)$$

ὅπου $\quad k_c = \frac{p_{nl}}{\alpha}$, $\quad p_{nl}$ ἡ l τάξης ρίζα τῆς $J_n(\upsilon)$ (5-167)

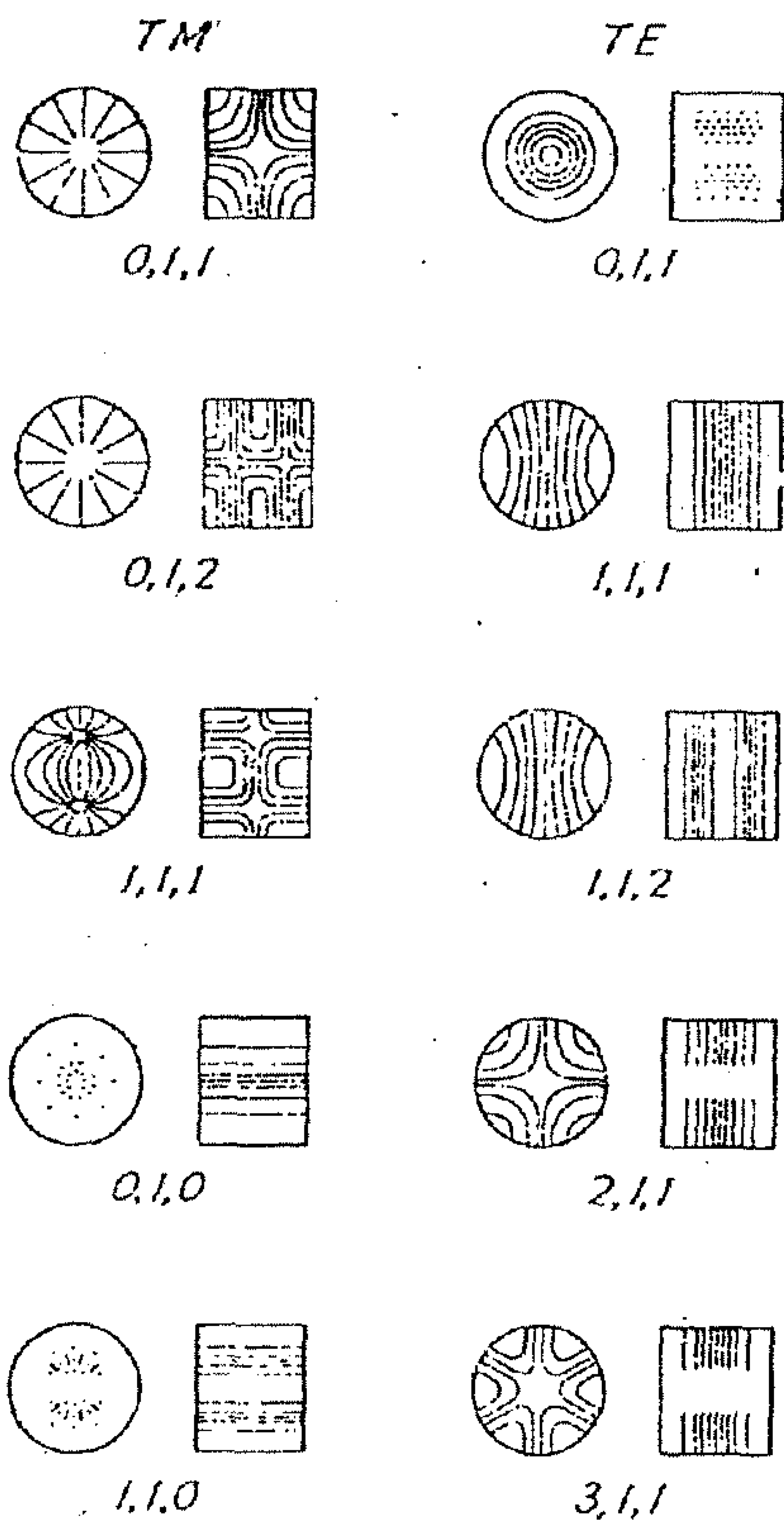
$$k_z = \frac{q\pi}{L} \quad , \quad q = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5\text{-}168)$$

καί $\quad \left(\frac{\omega}{\upsilon}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = k_c^2 + k_z^2$ (5-169)

Οἱ σχέσεις (5-166) περιγράφουν στάσιμα ἠλεκτρομαγνητικά κύματα, πού ἡ κυκλική τους συχνότητα ω καθορίζεται ἀπό τήν(5-169) δηλ. ἀπό τίς διαστάσεις τοῦ ἀντηχείου καί ἀπό τήν τριάδα τῶν ἀκεραίων (n,l,q) πού καθορίζουν τήν τάξη τοῦ στάσιμου κυματικοῦ τύπου. Ἡ (5-169) ὁδηγεῖ στό μῆκος κύματος συντονισμοῦ καί στή συχνότητα συντονισμοῦ :

$$\frac{1}{\lambda_{nlq}} = \sqrt{\left(\frac{p_{nl}}{2\pi\alpha}\right)^2 + \left(\frac{q}{2L}\right)^2} \quad \text{ἤ} \quad f_{nlq} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(\frac{p_{nl}}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{L}\right)^2}{\varepsilon\mu}} \qquad (5\text{-}170)$$

Στό σχ. 5-12 φαίνεται ή κατανομή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου γιά ὁρισμένους κυματικούς τύπους TM_{nlq} καί TE_{nlq} τοῦ κυλινδρικοῦ ἀντηχείου.

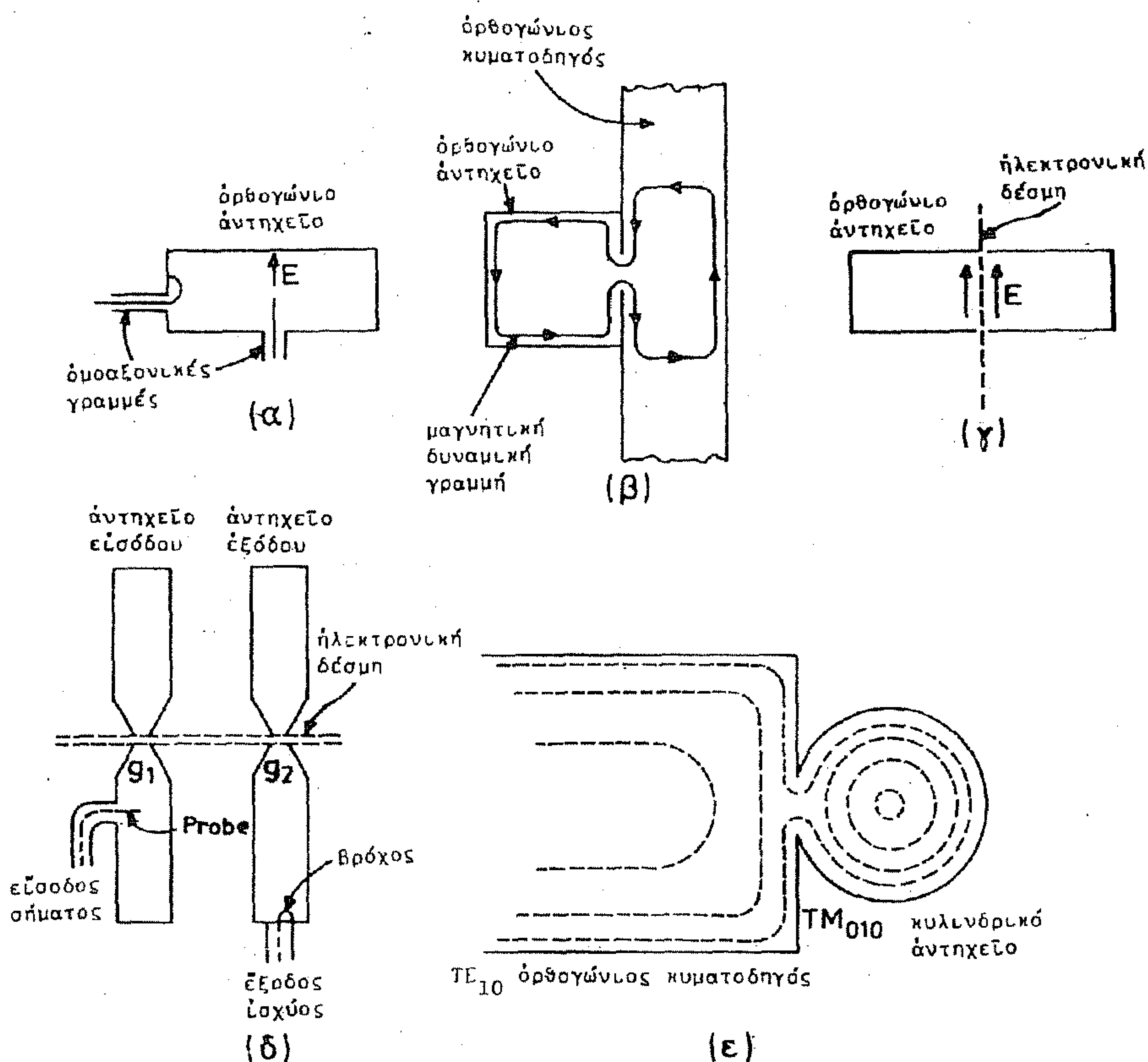


Σχ. 5-12 Κατανομή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου γιά ὁρισμένους κυματικούς τύπους TM_{nlq} καί TE_{nlq} σέ ἕνα κυλινδρικό ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο .

5.5.3. Σύζευξη ἀντηχείου μέ γραμμή μεταφορᾶς.

Ἕνα σοβαρό πρακτικό πρόβλημα εἶναι ἡ προσφορά ἤ ἡ ἀπαγωγή ἐνέργειας ἀπό ἕνα ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο.

Στό σχ. 5-13 φαίνονται μερικοί τρόποι συζεύξεως ὀρθογώνιων καί κυλινδρικῶν ἀντηχείων μέ ὁμοαξονική γραμμή, μέ κυματοδηγό καί μέ ἠλεκτρονική δέσμη.



Σχ. 5-13 Τυπικές περιπτώσεις συζεύξεως ἀντηχείου μέ ὁμοαξονική γραμμή, μέ κυματοδηγό καί μέ ἠλεκτρονική δέσμη.

Εἰδικότερα φαίνεται ἡ σύζευξη ὀρθογώνιου ἠλεκτρομαγνητικοῦ ἀντηχείου μέ ὁμοαξονική γραμμή (σχ. 5-13α), μέ ὀρθογώνιο κυ-

τοδηγό (σχ. 5-13β) καί μέ ήλεκτρονική δέσμη (σχ. 5-13γ). Στό σχ. 5-13δ φαίνεται,ἐξάλλου,ἡ σύζευξη τῶν ἀντηχείων ἐνισχύτριας λυχνίας Klystron μέ τήν ἡλεκτρονική δέσμη καί μέ τίς ὁμοαξονικές γραμμές εἰσόδου καί ἐξόδου.

Τέλος στό σχ. 5-13ε ὑποδείχνεται ὁ τρόπος προσαρμογῆς τοῦ τύπου TE_{10} ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ μέ τόν τύπο TM_{010} ἑνός κυλινδρικοῦ ἀντηχείου .

6. ΔΙΑΔΟΣΗ ΜΕΣΑ ΣΕ ΙΟΝΙΣΜΕΝΟ ΜΕΣΟ.
(Μελέτη 'Επίπεδου Κύματος σέ 'Ιονισμένο Μέσο)

Στά προηγούμενα (Κεφ. 3.5) μελετήσαμε τή διάδοση ἐπίπεδου κύματος σέ ἀγώγιμο μέσο.Στό κεφάλαιο αὐτό θά ἐξετάσουμε τή διάδοση μέσα σέ ἰονισμένο μέσο (π.χ. ἀέριο πλάσμα) .Παρά τό ὅτι τό ἰονισμένο μέσο μπορεῖ νά καταταγεῖ στούς καλούς ἀγωγούς,δέν εἶναι δυνατή ἡ παραδοχή ὅτι $\sigma \gg \omega\varepsilon$, καί ἐπομένως ἡ προηγούμενη μελέτη δέν ἐφαρμόζεται. 'Επιπλέον, τό ἰονισμένο μέσο γίνεται ἀ ν ι σ ό τ ρ ο π ο ὅταν ὑπάρχει ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, γιατί τότε τό ὑλικό ἀποκτᾶ μιά "προεξάρχουσα"κατεύθυνση καί ἐμφανίζει διαφορετικά χαρακτηριστικά διάδοσης πρός διαφορετικές διευθύνσεις.

'Επομένως εἶναι ἀναγκαία μιά πιό γενική μελέτη τῆς διάδοσης τοῦ ἐπιπέδου κύματος σέ ἕνα τέτοιο μέσο παρουσία μαγνητικοῦ πεδίου.

6.1. Τανυστές τῆς Εὐκινησίας καί τῆς Εἰδικῆς 'Αγωγιμότητας τοῦ 'Ιονισμένου Μέσου Παρουσία Μαγν. Πεδίου.

"Ενα " οὐδέτερο " ἀέριο πλάσμα ἀποτελεῖται ἀπό θετικά καί ἀρνητικά ἰόντα μέ ἴσα ὀλικά φορτία. Γιά τήν ἁπλότητα θά τό θεωρήσουμε ὅτι ἀποτελεῖται ἀπό ἠλεκτρόνια καί θετικά ἰόντα μέ πολύ μικρή θερμική διαταραχή (ψυχρό πλάσμα) καί χωρίς σημαντικές ἀλληλεπιδράσεις μεταξύ τῶν ἰόντων (ἀραιό πλάσμα).

'Επειδή τά θετικά ἰόντα εἶναι δυσκίνητα σέ σύγκριση μέ τά ἠλεκτρόνια μποροῦμε νά θεωρήσουμε τελικά τό μέσο σάν ἀ έ ρ ι ο ἠ λ ε κ τ ρ ο ν ί ω ν , πού δέν συγκρούονται μεταξύ τους.

Στό σχ. 6-1 διαλέγουμε τό καρτεσιανό σύστημα, πού ἔχει τόν ἄξονα z παράλληλο μέ τό ἐξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_{\varepsilon\xi}$, πού θεω-

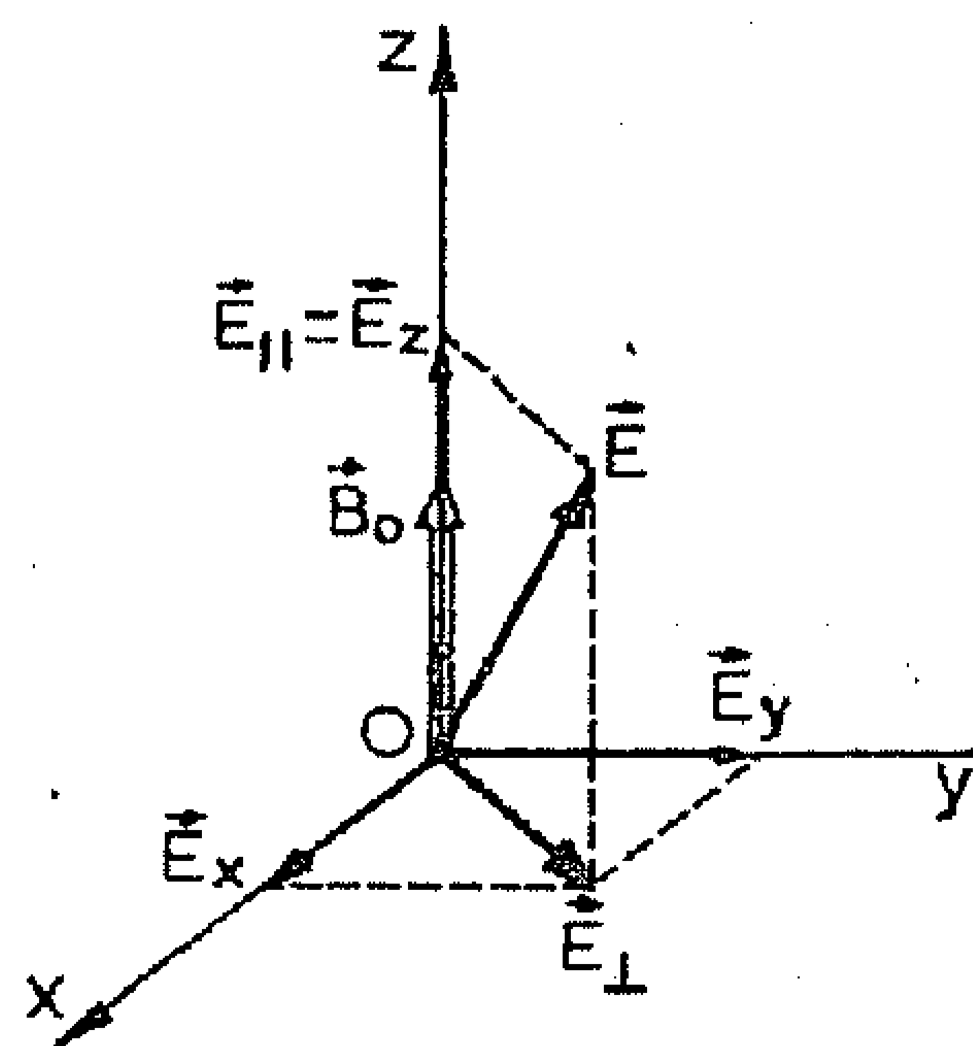
ροῦμε ὅτι ἔχει σταθερή τιμή :

$$\vec{B}_{\varepsilon\xi} = \vec{B}_o \qquad (6\text{-}1)$$

Ἔστω $\vec{E}$ τό ἠλεκτρικό πεδίο ἑνός ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος πού διαδίδεται μέσα στό μέσο, καί $\vec{B}$ τό μαγνητικό πεδίο. Ἐδῶ ὑποθέτουμε ὅτι

$$B \ll B_o \qquad (6\text{-}2)$$

ὥστε, πρακτικά, μέσα στό μέσο ἐπικρατεῖ τό σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_o$. Τό διάνυσμα $\vec{E}$ ἔχει τυχαῖο προσανατολισμό καί ἀναλύεται σέ μιά συνιστώσα παράλληλη μέ τό μαγνητικό πεδίο ($\vec{E}_{\parallel}=\vec{E}_z$ καί μιά κάθετη($\vec{E}_{\perp}$), πού ἀναλύεται παραπέρα στίς $\vec{E}_x$ καί $\vec{E}_y$.



Σχ. 6-1. Σύστημα συντεταγμένων γιά τή μελέτη ἐπίπεδου κύματος μέσα σέ μαγνητόπλασμα .

Γιά συνηθισμένες ταχύτητες τῶν ἠλεκτρονίων (υ ≪ c) ἡ θεμελιώδης ἐξίσωση τῆς δυναμικῆς γράφεται γιά κάθε ἠλεκτρόνιο :

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = e(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}_o) \qquad (6\text{-}3)$$

Προβάλλοντας τήν (6-3) στούς τρεῖς ἄξονες x,y,z ἔχουμε :

$$E_x + \upsilon_y B_o = \frac{m}{e}\frac{d\upsilon_x}{dt} \qquad (6\text{-}4)$$

$$E_y - \upsilon_x B_o = \frac{m}{e}\frac{d\upsilon_y}{dt} \qquad (6\text{-}5)$$

$$E_z = \frac{m}{e}\frac{d\upsilon_z}{dt} \qquad (6\text{-}6)$$

Θεωροῦμε τώρα ὅτι τό ἠλεκτρομαγνητικό κύμα εἶναι μονοχρωματικό (ἁρμονικό) μέ κυκλική συχνότητα ω . Τά ἠλεκτρόνια τότε θά ἐκτελοῦν ἐξαναγκασμένη κίνηση μέ κυκλική συχνότητα ω καί ἡ ταχύτητά τους θά μπορεῖ νά περιγραφεῖ μέ μιά ἐξίσωση τῆς μορφῆς :

$$\vec{\mathfrak{v}}(\vec{r},t) = \vec{\mathfrak{v}}(\vec{r})e^{j\omega t} \qquad (6\text{-}7)$$

ὅπου

$$\vec{\mathfrak{v}} = \vec{\mathfrak{v}}(\vec{r}) \qquad (6\text{-}8)$$

τό φασικό διάνυσμα (phasor) τῆς ταχύτητας.

Χρησιμοποιώντας τούς phasors τῶν πεδίων καί τῆς ταχύτητας στίς (6-4) , (6-5), (6-6) τίς ξαναγράφουμε ἔτσι :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x + \mathfrak{v}_y B_o &= j\omega \frac{m}{e}\mathfrak{v}_x \\ \mathcal{E}_y - \mathfrak{v}_x B_o &= j\omega \frac{m}{e}\mathfrak{v}_y \\ \mathcal{E}_z &= j\omega \frac{m}{e}\mathfrak{v}_z \end{aligned}\right\}$$

ἤ

$$\left.\begin{aligned} j\omega m \mathfrak{v}_x - eB_o\mathfrak{v}_y &= e\mathcal{E}_x \\ eB_o\mathfrak{v}_x + j\omega m \mathfrak{v}_y &= e\mathcal{E}_y \\ j\omega m \mathfrak{v}_z &= e\mathcal{E}_z \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}9)$$

Ἡ τρίτη ἐξίσωση ἀπό τίς (6-9) δίνει :

$$\mathfrak{v}_z = \frac{e}{m}\frac{-j\mathcal{E}_z}{\omega} \qquad (6\text{-}10)$$

Ἀπό τή λύση τοῦ συστήματος τῶν δύο πρώτων ἀπό τίς (6-9) ἔχουμε:

$$\mathfrak{v}_x = \frac{e}{m}\frac{j\omega\mathcal{E}_x + \frac{e}{m}B_o\mathcal{E}_y}{\frac{e^2}{m^2}B_o^2 - \omega^2} \qquad (6\text{-}11)$$

$$\upsilon_y = \frac{e}{m}\,\frac{j\omega\mathcal{E}_y - \frac{e}{m}B_o\mathcal{E}_x}{\frac{e^2}{m^2}B_o^2 - \omega^2} \qquad (6\text{-}12)$$

Εἰσάγοντας τή γ υ ρ ο μ α γ ν η τ ι κ ή σ υ χ ν ό τ η τ α*).

$$\omega_g \equiv \frac{e}{m}\,B_o \qquad (6\text{-}13)$$

ξαναγράφουμε τίς ἐξισώσεις, πού δίνουν τίς προβολές τῆς ταχύτητας, ἔτσι:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_x &= \frac{e}{m}\,\frac{j\omega\mathcal{E}_x + \omega_g\mathcal{E}_y}{\omega_g^2 - \omega^2} \\ \upsilon_y &= \frac{e}{m}\,\frac{-\omega_g\mathcal{E}_x + j\omega\mathcal{E}_y}{\omega_g^2 - \omega^2} \\ \upsilon_z &= \frac{e}{m}\,\frac{-j\mathcal{E}_z}{\omega} \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}14)$$

πού μποροῦν νά γραφοῦν καί

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_x &= j\frac{e}{m}\,\frac{\omega}{\omega_g^2 - \omega^2}\mathcal{E}_x + \frac{e}{m}\,\frac{\omega_g}{\omega_g^2 - \omega^2}\mathcal{E}_y + 0\cdot\mathcal{E}_z \\ \upsilon_y &= -\frac{e}{m}\,\frac{\omega_g}{\omega_g^2 - \omega^2}\mathcal{E}_x + j\frac{e}{m}\,\frac{\omega}{\omega_g^2 - \omega^2}\mathcal{E}_y + 0\cdot\mathcal{E}_z \\ \upsilon_z &= 0\cdot\mathcal{E}_x + 0\cdot\mathcal{E}_y - j\frac{e}{m\omega}\mathcal{E}_z \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}15)$$

---

*). Η ω_g εἶναι ἡ κυκλική συχνότητα, μέ τήν ὁποία περιφέρεται σέ κυκλική τροχιά ἕνα ἠλεκτρόνιο ὅταν ἐξαπολυθεῖ μέσα σ'ἕνα ὁμογενές μαγνητικό πεδίο B_o μέ ταχύτητα κάθετη σ' αὐτό .

Μποροῦμε νά συμπτύξουμε τίς (6-15) ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\vec{\vartheta} = \bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{\mathcal{E}}} \qquad (6\text{-}16)$$

ἤ

$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{bmatrix} \cdot [\mathcal{E}] \qquad (6\text{-}17)$$

ὅπου

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21}=-\tau_{12} & \tau_{22}=\tau_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} j\frac{e}{m}\frac{\omega}{\omega_g^2-\omega^2} & \frac{e}{m}\cdot\frac{\omega_g}{\omega_g^2-\omega^2} & 0 \\ -\frac{e}{m}\cdot\frac{\omega_g}{\omega_g^2-\omega^2} & j\frac{e}{m}\frac{\omega}{\omega_g^2-\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & -j\frac{e}{m\omega} \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}18)$$

εἶναι ὁ λεγόμενος τ α ν υ σ τ ή ς τῆς ε ὐ κ ι ν η σ ί α ς .

Στήν περίπτωση τοῦ μέσου, πού ἐξετάζουμε, τά ρεύματα εἶναι ρεύματα μεταφορᾶς εἶναι δηλαδή :

$$\vec{\mathcal{J}} = \rho\vec{\vartheta} = Ne\vec{\vartheta} = Ne\bar{\bar{\tau}}\,\vec{\mathcal{E}} \qquad (6\text{-}19)$$

Ἀπό τήν (6-19) μποροῦμε νά ὁρίσουμε ἕναν τ α ν υ σ τ ή ε ἰ - δ ι κ ῆ ς ἀ γ ω γ ι μ ό τ η τ α ς :

$$\bar{\bar{\sigma}} = Ne\bar{\bar{\tau}} \qquad (6\text{-}20)$$

ὅπου N ἡ πυκνότητα τῶν ἠλεκτρονίων καί νά γράψουμε

$$\vec{\mathcal{J}} = \bar{\bar{\sigma}}\,\vec{\mathcal{E}} \qquad (6\text{-}21)$$

καί

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_0 \begin{bmatrix} \frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_g^2} & \frac{-j\omega\omega_g}{\omega^2-\omega_g^2} & 0 \\ \frac{j\omega\omega_g}{\omega^2-\omega_g^2} & \frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_g^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6-22)$$

μέ

$$\sigma_0 = -j\frac{Ne^2}{\omega m} \qquad (6-23)$$

Σ υ μ π ε ρ ά σ μ α τ α

α. Όταν $\omega \neq \omega_g$ θά εἶναι πεπερασμένα τά υ_x καί υ_y καί τά ἠλεκτρόνια θά διαγράφουν, γενικά, ἐλλειπτικές ἑλικοειδεῖς τροχιές μέ ἄξονα τόν ἄξονα z, πού ἡ μορφή τους ἐξαρτᾶται ἀπό τά πλάτη τῶν προβολῶν $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$ καί τήν τιμή τῆς ω_g (δηλ.τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου)καί ἀπό τήν κυκλική συχνότητα ω.
Κατά τόν ἄξονα z ἡ κίνηση εἶναι παλινδρομική .

β. Ἡ παρουσία τοῦ ἐξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου $\vec{B}_0$, ἐπηρεάζει μόνο τίς κάθετες πρός τό πεδίο αὐτό συνιστῶσες τῆς εἰδικῆς ἀγωγιμότητας.

γ. Όταν $\omega \to \omega_g$ οἱ ταχύτητες υ_x ,$\upsilon_y \to \infty$. Τότε ἔχουμε τό λεγόμενο " γ υ ρ ο μ α γ ν η τ ι κ ό σ υ ν τ ο ν ι σ μ ό ", δηλαδή μιά ἔντονη ἀλληλεπίδραση τοῦ κύματος μέ τά ἠλεκτρόνια. Στήν πράξη δέν γίνεται $\upsilon_x = \upsilon_y = \infty$ γιατί ἀναπτύσσονται συγκρούσεις, πού συνεχῶς αὐξάνουν , μέ ἀποτέλεσμα οἱ υ_x , υ_y νά φτάνουν σέ μεγάλες, ἀλλά πεπερασμένες τιμές.

δ. Όταν $\omega \gg \omega_g$ τότε

$$\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_g^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega_g}{\omega}\right)^2} = \left(1-\frac{\omega_g^2}{\omega^2}\right)^{-1} \simeq 1+\frac{\omega_g^2}{\omega^2} = 1+\epsilon \qquad (6-24)$$

ὅπου
$$\epsilon = \frac{\omega_g^2}{\omega^2} \tag{6-25}$$

Ὥστε

$$\frac{\bar{\bar{\sigma}}}{\sigma_o} = \begin{bmatrix} 1+\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1+\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & j\frac{\omega_g}{\omega} & 0 \\ -\frac{j\omega_g}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6-26}$$

Ἀπό τήν ἔκφραση αὐτή μποροῦμε νά βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα:

δ1. Ἡ ἀγωγιμότητα διατηρεῖ τήν τιμή σ_o πού εἶχε χωρίς μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_o$ μόνο κατά τή διεύθυνση τοῦ $\vec{B}_o$ (ἄξονας z) .

δ2. Οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τῆς διαγωνίου τῆς πραγματικῆς μήτρας διαφέρουν ἀπό τόν τρίτο (μονάδα) κατά τό ποσό $\epsilon=\omega_g^2/\omega^2$ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρός ω_g/ω . Ἡ μικρή αὐτή μεταβολή τῆς ἀγωγιμότητας κατά τίς διευθύνσεις τίς κάθετες πρός τό $\vec{B}_o$ εἶναι ἡ λεγόμενη " μ α γ ν η τ ο α ν τ ί σ τ α σ η *) " .

δ3. Ὁ δεύτερος προσθετέος τῆς μήτρας $\bar{\bar{\sigma}}/\sigma_o$ ἐκφράζει τό γνωστό " φ α ι ν ό μ ε ν ο H a l l " , πού εἶναι φαινόμενο πρώτου βαθμοῦ τοῦ ω_g/ω καί ἐκδηλώνεται κατά τίς κάθετες πρός τό $\vec{B}_o$ καί πρός τό $\vec{E}$ διευθύνσεις.

ε. Ἄν $\omega_g \gg \omega$ οἱ ὅροι τῆς μαγνητοαντίστασης καί τοῦ φαινομένου Hall τείνουν νά μηδενιστοῦν.

---

*) Ἄς θυμηθοῦμε ἀπό τή Γενική Φυσική ὅτι μαγνητοαντίσταση εἶναι ἡ ἀνηγμένη μεταβολή τῆς είδ. ἀντίστασης ἤ τῆς εἰδικῆς ἀγωγιμότητας, λόγω τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου κατά τίς διευθύνσεις τίς ἐγκάρσιες πρός τό πεδίο αὐτό.

6.2. Ὁ Τανυστής τῆς Διηλεκτρικῆς Σταθερᾶς.

Στήν ἀνάλυσή μας θεωροῦμε μεταξύ τῶν ἠλεκτρονίων ὅτι ὑπάρχει κενό(δηλ. $\varepsilon=\varepsilon_0$ ἡ διηλεκτρική σταθερά τοῦ κενοῦ). Μακροσκοπικά ὅμως, ἡ ἐ ν ε ρ γ ό ς δ ι η λ ε κ τ ρ ι κ ή σ τ α θ ε ρ ά εἶναι τανυστής πού περιέχει τόν τανυστή τῆς ἀγωγιμότητας καί προκύπτει ἀπό τήν πρώτη ἐξίσωση τοῦ Maxwell :

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + j\omega\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} = (\bar{\bar{\sigma}} + j\omega\varepsilon_0)\vec{\mathcal{E}} \qquad (6\text{-}27)$$

Γράφοντας

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} = j\omega\bar{\bar{\varepsilon}}\vec{\mathcal{E}} \qquad (6\text{-}28)$$

ὁρίζουμε τήν " ἐνεργό διηλεκτρική σταθερά " .

$$\boxed{\bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_0\left(1 + \frac{\bar{\bar{\sigma}}}{j\omega\varepsilon_0}\right)} \qquad (6\text{-}29)$$

Ὁρίζοντας τή σ υ χ ν ό τ η τ α π λ ά σ μ α τ ο ς ω_p *) μέ τή σχέση:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \qquad (6\text{-}30)$$

καί γράφοντας:

$$\frac{\sigma_0}{j\omega\varepsilon_0} = \frac{-j\dfrac{Ne^2}{m\omega}}{j\omega\varepsilon_0} = \frac{-Ne^2}{m\omega^2\varepsilon_0} = \frac{-\dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}{\omega^2} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (6\text{-}31)$$

ἔχουμε :

---

*) Ἄν ἕνα οὐδέτερο νέφος φορτίων (πλάσμα) διαταραχθεῖ, ἀποδείχνεται ὅτι μπορεῖ νά τεθεῖ σέ ταλάντωση στή συχνότητα ω_p . Στήν ταλάντωση τοῦ πλάσματος τῆς ἡλιακῆς ἀτμόσφαιρας ὀφείλονται ὁρισμένοι τύποι ἀκτινοβολίας πού δέχεται ἡ γῆ ἀπό τόν ἥλιο.

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\omega_p^2}{\omega_g^2-\omega^2} & \dfrac{-j\omega_p^2\omega_g}{\omega(\omega_g^2-\omega^2)} & 0 \\ \dfrac{j\omega_p^2\omega_g}{\omega(\omega_g^2-\omega^2)} & 1+\dfrac{\omega_p^2}{\omega_g^2-\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & -j\varepsilon_{12} & 0 \\ j\varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (6\text{-}32)$$

ὅπου $$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} \quad (6\text{-}33)$$

καί $$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} \quad (6\text{-}34)$$

Ἀπό τήν (6-32) προκύπτει ἡ μήτρα τῆς "σχετικῆς διηλεκτρικῆς σταθερᾶς"

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_r \equiv \frac{\bar{\bar{\varepsilon}}}{\varepsilon_0} \quad (6\text{-}35)$$

Μερικά Συμπεράσματα γιά τήν περίπτωση $B_o \to 0$ $\left(\text{δηλ. } \frac{\omega_g}{\omega} \to 0\right)$.

α. Ἡ (6-32) ἁπλουστεύεται στήν :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6\text{-}36)$$

Δηλαδή τό μέσο εἶναι ἰσότροπο μέ $\varepsilon=\varepsilon_o(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2})$ καί στήν εἰδική αὐτή περίπτωση ὁ δείκτης τῆς διάθλασης τοῦ μέσου θά εἶναι :

$$\eta \equiv \frac{c}{\upsilon} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu_0}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (6\text{-}37)$$

β. Ἄν ἡ κυκλική συχνότητα ω τείνει πρός τήν ω_p, τότε

$$\varepsilon \to 0 \quad \text{καί} \quad \eta \to 0 \quad (6\text{-}38)$$

καί παύει κάθε διάδοση.

Θά άποδείξουμε, ὅμως, ὅτι ἡ διάδοση σταματᾶ γιά ὅλη τήν περιοχή συχνοτήτων $\omega \leqslant \omega_p$, ὅπου τά ε καί η εἶναι φανταστικά.

῾Η σταθερά διαδόσεως γ ἑνός ἐπίπεδου ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος πού τρέχει μέσα σέ πλάσμα χωρίς μαγνητικό πεδίο (βλ.κεφ.3.5) εἶναι :

$$\gamma = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right)} \qquad (6\text{-}39)$$

Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις :

β1. Γιά $\omega = \omega_p$ εἶναι :

$$\gamma = 0 \qquad (6\text{-}40)$$

δηλ. τό ἐπίπεδο κύμα δέν διαδίδεται.

β2. Γιά $\omega < \omega_p$ εἶναι :

$$\gamma = \alpha > 0 \qquad (6\text{-}41)$$

τό κύμα δέν εἶναι τρέχον ἀλλά μιά ταλάντωση μέ πλάτος πού φθίνει μέ τήν ἀπόσταση.

β3. Γιά $\omega > \omega_p$ εἶναι :

$$\gamma = j\beta = j\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)} \qquad (6\text{-}42)$$

τιμή πού ἀντιστοιχεῖ σέ τρέχον κύμα μέ ἀμείωτο πλάτος.

Τό πλάσμα, λοιπόν, ἐμφανίζει μιά κρίσιμη συχνότητα f_p :

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{N}{\varepsilon_0 m}} \qquad (6\text{-}43)$$

κάτω ἀπό τήν ὁποία δέν γίνεται διάδοση .

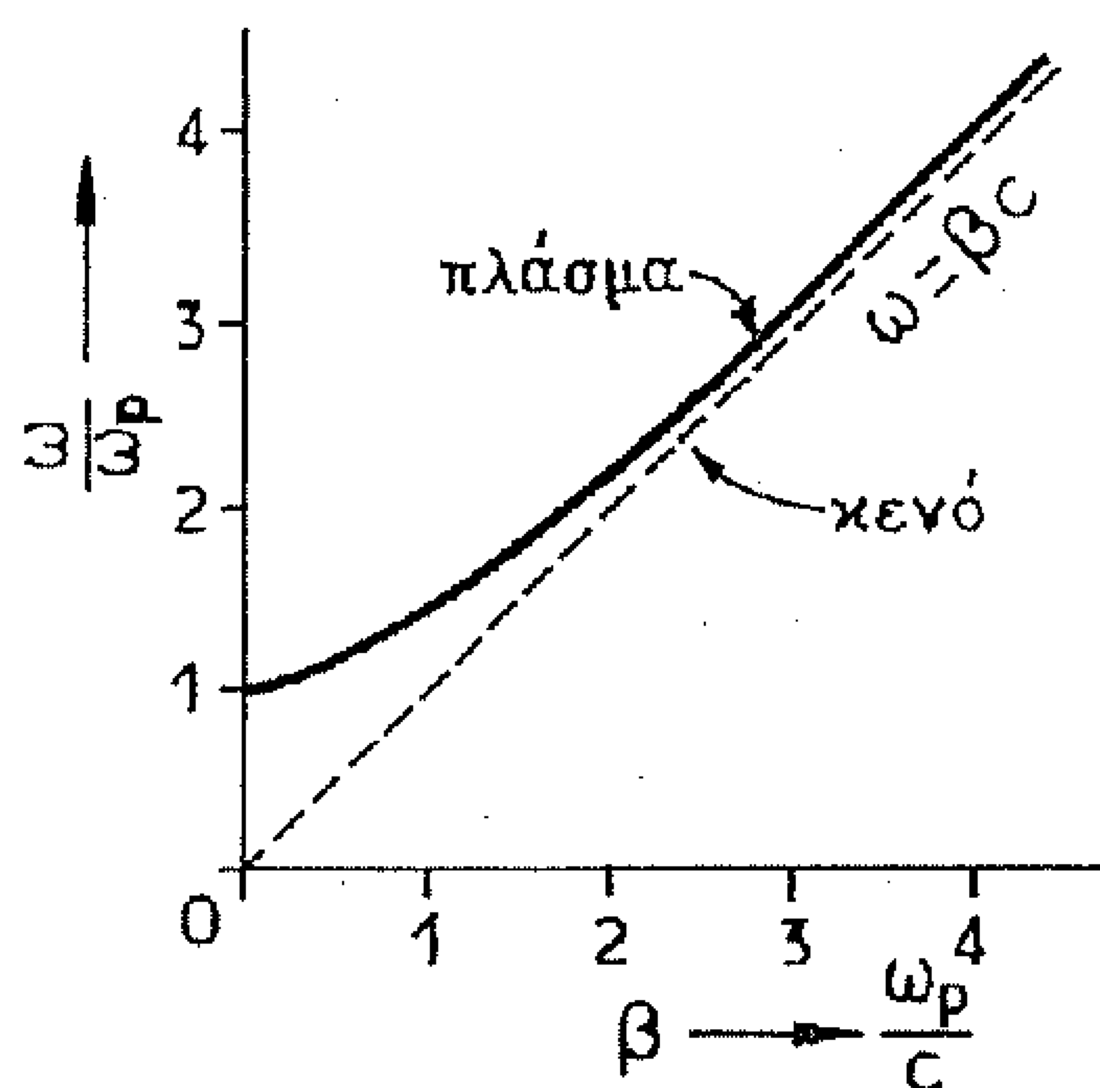
῎Αν ἀντικαταστήσουμε τίς τιμές τῶν e, ε_0 καί m στήν (6-43) βρίσκουμε τή σχέση :

$$f_p = 9\sqrt{N} \qquad (6\text{-}44)$$

πού δίνει τήν f_p σέ H_z άν ή N είναι σέ ήλεκτρόνια/m^3 .

Σάν παράδειγμα άναφέρουμε ότι ή ήλεκτρονική πυκνότητα N τοῦ πλάσματος τῆς γήινης ίονόσφαιρας παίρνει συχνά τιμές τῆς τάξης 10^{12}ηλ/m^3 , πού άντιστοιχεῖ σέ κρίσιμη συχνότητα f_p = 9 MHz . Γι' αύτό, λοιπόν, ή περιοχή συχνοτήτων, πού χρησιμοποιοῦν τά γήινα ραδιοτηλεσκόπια περιορίζεται πάνω άπό τή συχνότητα 10MHz, έξαιτίας άκριβῶς τῆς ίονοσφαιρικῆς άποκοπῆς.

"Αν βγοῦμε έξω άπό τή μαγνητόσφαιρα (μέ πυραύλους,δορυφόρους ή άλλα διαστημικά όχήματα) μποροῦμε νά ύποβιβάσουμε τή συχνότητα παρατήρησης μέχρι $\gtrsim$30KHz γιατί ώς έκεῖ έπιτρέπει ή συχνότητα f_p τοῦ διαπλανητικοῦ πλάσματος (N = 10 ήλ/cm^3)



Σχ. 6-2. Σχέση β καί ω στό πλάσμα άπουσία έξωτερικοῦ μαγνητικοῦ πεδίου .

<u>"Έξίσωση διασπορᾶς"</u>. Γιά $\omega > \omega_p$, όπως εἴδαμε ίσχύει ή (6-42) πού μπορεῖ νά πάρει τήν τελική μορφή:

$$\omega^2 = c^2\beta^2 + \omega_p^2 \qquad (6\text{-}45)$$

'Από τήν (6-45) προκύπτει ή έξίσωση τῆς διασπορᾶς $\omega = \sigma(\beta)$ τοῦ πλάσματος χωρίς μαγνητικό πεδίο.

'Η γραφική παράσταση τῆς $\omega = \sigma(\beta)$ δίνεται στό σχῆμα 6.2 .

6.3. Σταθερά τῆς Διάδοσης καί Δείκτης Διάθλασης.

Ἄς διατυπώσουμε τή διανυσματική διαφορική ἐξίσωση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\vec{E}$ μέσα στό πλάσμα .

Ἀπό τή δεύτερη ἐξίσωση τοῦ Maxwell

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_0\vec{\mathcal{H}} \qquad (6\text{-}46)$$

ἔχουμε:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu_0\,\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} \qquad (6\text{-}47)$$

Ἀπό τή σχέση (6-28) ὅμως ἔχουμε:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} = j\omega\bar{\bar{\varepsilon}}\vec{\mathcal{E}} \qquad (6\text{-}48)$$

ὥστε ἡ (6-47) γίνεται:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} = \omega^2\mu_0\bar{\bar{\varepsilon}}\,\vec{\mathcal{E}} \qquad (6\text{-}49)$$

Ζητοῦμε μιά γενική ἐπίπεδη λύση τῆς μορφῆς :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{E}}\,e^{j\omega t} = \vec{\mathcal{E}}_0\,e^{j(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})} \qquad (6\text{-}50)$$

χρησιμοποιώντας, τήν τελεστική ἀντιστοιχία

$$\vec{\nabla} \Longleftrightarrow -j\vec{k} \qquad (6\text{-}51)$$

στήν (6-49) ἔχουμε :

$$-j\vec{k}\times(-j\vec{k})\times\vec{\mathcal{E}} - \omega^2\mu_0\bar{\bar{\varepsilon}}\,\vec{\mathcal{E}} = 0 \qquad (6\text{-}52)$$

ἤ ἐπειδή

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_0\,\bar{\bar{\varepsilon}}_r \qquad \text{καί} \qquad \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \qquad (6\text{-}53)$$

εἶναι:

$$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\bar{\bar{\varepsilon}}_r\,\vec{\mathcal{E}} = 0 \qquad (6\text{-}54)$$

Χρησιμοποιώντας τή διανυσματική ταυτότητα

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \qquad (6\text{-}55)$$

γράφουμε τήν (6-54) ἔτσι :

$$(\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}})\vec{k} - k^2\vec{\mathcal{E}} + \frac{\omega^2}{c^2}\bar{\bar{\varepsilon}}_r\vec{\mathcal{E}} = 0 \qquad (6\text{-}56)$$

Ὁρίζοντας τόν ταυυστή

$$\overline{\overline{kk}} = \begin{bmatrix} k_xk_x & k_xk_y & k_xk_z \\ k_yk_x & k_yk_y & k_yk_z \\ k_zk_x & k_zk_y & k_zk_z \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}57)$$

γράφουμε τήν (6-56) μέ τή μορφή :

$$\left[\overline{\overline{kk}} - k^2\bar{\bar{I}} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \bar{\bar{\varepsilon}}_r\right]\vec{\mathcal{E}} = 0 \quad ^{*)} \qquad (6\text{-}58)$$

Θέτοντας :

$$\bar{\bar{D}} \equiv \left[\bar{\bar{\varepsilon}}_r - \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2\bar{\bar{I}} + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2\overline{\overline{kk}}\right] \qquad (6\text{-}59)$$

γράφουμε :

$$\bar{\bar{D}}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0 \qquad (6\text{-}60)$$

Ἡ σχέση αὐτή δίνει τρεῖς γραμμικές ὁμογενεῖς ἐξισώσεις ὡς πρός τίς τρεῖς συνιστῶσες τοῦ $\vec{\mathcal{E}}$. Γιά νά εἶναι τό σύστημα αὐτό ἐπιλύσιμο θά πρέπει ἡ ὁρίζουσα D τῆς μήτρας $\bar{\bar{D}}$ νά εἶναι μηδέν. Δηλαδή :

$$D(\vec{k},\omega) = 0 \qquad (6\text{-}61)$$

---

*) Μέ $\bar{\bar{I}}$ συμβολίζουμε τή μοναδιαία μήτρα $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

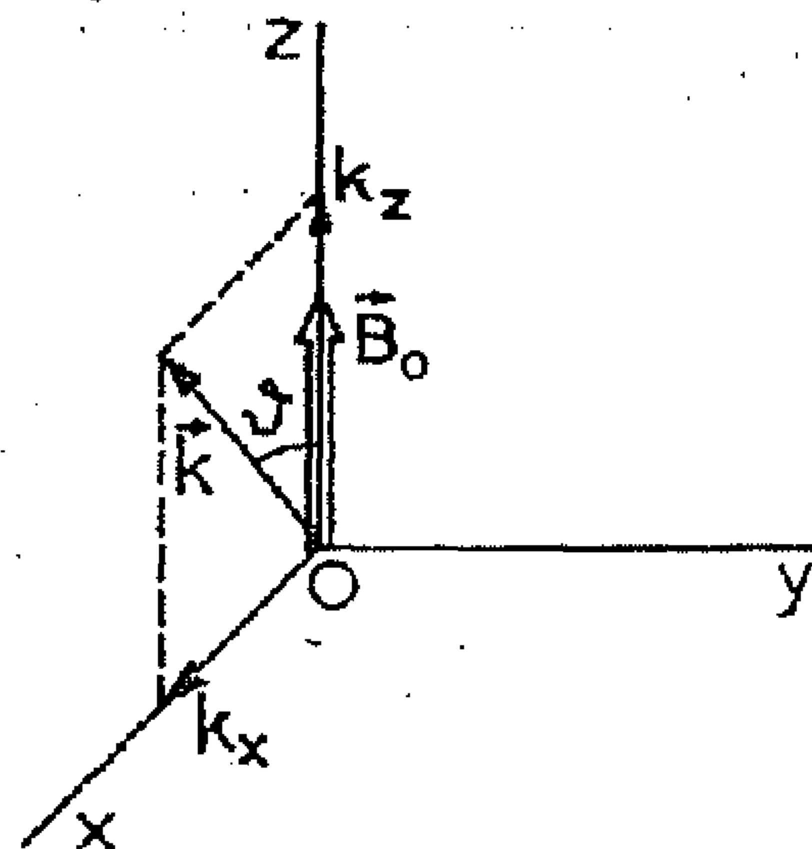
Ἡ (6-58) μέ τή μορφή δεικτῶν γράφεται:

$$\left[k_ik_j - k^2\delta_{ij} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_{ij}\right]\mathcal{E}_j = 0 \qquad i,j = x,y,z$$

ὅπου δ_{ij} τό δέλτα τοῦ Kronecker .

Ἡ (6-61) εἶναι ἡ λεγόμενη ἐ ξ ί σ ω σ η τ ῆ ς δ ι α σ π ο ρ ᾶ ς (dispersion equation). Οἱ λύσεις της δίνουν τούς διάφορους κυματικούς τύπους πού μποροῦν νά διαδοθοῦν στό μαγνητόπλασμα.

Ἄν πάρουμε τό σύστημα τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων ὅπως δείχνει τό σχ. 6-3 ἔχουμε :



Σχ. 6-3

$$\overline{\overline{kk}} = \begin{bmatrix} k^2\sin^2\vartheta & 0 & k^2\sin\vartheta\cos\vartheta \\ 0 & 0 & 0 \\ k^2\sin\vartheta\cos\vartheta & 0 & k^2\cos^2\vartheta \end{bmatrix}$$

καί

$$\overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2\cos^2\vartheta & -j\varepsilon_{12} & \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2\sin\vartheta\cos\vartheta \\ j\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 & 0 \\ \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2\sin\vartheta\cos\vartheta & 0 & \varepsilon_{33}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2\sin^2\vartheta \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}62)$$

Ἡ ἐξίσωση διασπορᾶς (6-61) γράφεται:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2\cos^2\vartheta & -j\varepsilon_{12} & \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2\sin\vartheta\cos\vartheta \\ j\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 & 0 \\ \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2\sin\vartheta\cos\vartheta & 0 & \varepsilon_{33}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2\sin^2\vartheta \end{vmatrix} = 0 \qquad (6\text{-}63)$$

Γιά τήν ἐπιλυσή της θέτουμε :

$$\xi \equiv \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 k^2 \qquad (6\text{-}64)$$

καί καταλήγουμε στή δευτεροβάθμια ἐξίσωση :

$$(\varepsilon_{11}\sin^2\vartheta+\varepsilon_{33}\cos^2\vartheta)\xi^2-\left[2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}+(\varepsilon_{11}^2-\varepsilon_{12}^2-\varepsilon_{11}\varepsilon_{33})\sin^2\vartheta\right]\xi+\varepsilon_{33}(\varepsilon_{11}^2-\varepsilon_{12}^2)=0 \qquad (6\text{-}65)$$

'Από τή λύση τῆς τελευταίας προκύπτει:

$$k^2=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{(\varepsilon_{11}^2-\varepsilon_{12}^2-\varepsilon_{11}\varepsilon_{33})\sin^2\vartheta+2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}\pm\sqrt{(\varepsilon_{11}^2-\varepsilon_{12}^2-\varepsilon_{11}\varepsilon_{33})^2\sin^4\vartheta+4\varepsilon_{12}^2\varepsilon_{33}^2\cos^2\vartheta}}{2\left[(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33})\sin^2\vartheta+\varepsilon_{33}\right]} \quad (6\text{-}66)$$

Γιά νά διαδοθεῖ λοιπόν μέσα στό μαγνητόπλασμα ἕνα ἠλεκτρομαγνητικό κύμα, μέ κυκλική συχνότητα ω, κατά μιά ὁρισμένη διεύθυνση ϑ ὡς πρός τό ἐξωτερικό πεδίο $\vec{B}_o$, θά πρέπει τό κυματάνυσμά του $\vec{k}$ νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση (6-66).

Ἔχοντας τό $\vec{k}$ μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τό δείκτη τῆς διάθλασης $\vec{\eta}$ γιατί εἶναι :

$$\vec{\eta}=\frac{c}{\omega}\vec{k} \quad (6\text{-}67)$$

Συμπεράσματα.

α. Ὡς τώρα ἔχουμε ὑποθέσει ὅτι τό πλάσμα εἶναι ἀραιό καί ψυχρό (χωρίς δηλ. συγκρούσεις τῶν φορέων μεταξύ τους). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἐξασθένηση τοῦ κύματος θά εἶναι μηδαμινή καί τό k θά εἶναι πραγματικό, θά εἶναι δηλαδή μιά σταθερά φάσης β .

β. Ἄν τό ω εἶναι ἀρκετά μεγαλύτερο ἀπό τό ω_g, ὥστε νά ἔχουμε:

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}\simeq\varepsilon_{33}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (6\text{-}68)$$

ἀλλά ὄχι τόσο μεγάλο ὥστε τό ε_{12} νά θεωρηθεῖ μηδέν, ἀλλά

$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}\simeq\frac{-\omega_p^2\,\omega_g}{\omega^3} \quad (6\text{-}69)$$

τότε ἡ (6-66) ἀπλουστεύεται :

$$k^2=\beta^2=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_{11}\left\{1-\frac{\varepsilon_{12}^2}{2\varepsilon_{11}^2}\left(\sin^2\vartheta\pm\sqrt{\sin^4\vartheta+\left(\frac{2\varepsilon_{11}\cos\vartheta}{\varepsilon_{12}}\right)^2}\right)\right\} \quad (6\text{-}70)$$

γ. "Αν τό κύμα διαδίδεται παράλληλα πρός τό πεδίο $\vec{B}_o$ $(\vartheta = 0)$, (" δ ι α μ ή κ η ς " δ ι ά δ ο σ η - longitudinal propagation), ἡ (6-70) δίνει :

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{11} \pm \varepsilon_{12}} \qquad (6\text{-}71)$$

Χρησιμοποιώντας τήν (6-71) , (6-62) καί (6-60) μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι ἡ πόλωση τῶν κυμάτων, πού εἶναι δυνατό νά διαδοθοῦν, θά εἶναι κυκλική, δεξιόστροφη ἤ ἀριστερόστροφη.
Στή γενική περίπτωση ἀποδείχνεται ὅτι τό κύμα ἀναλύεται σέ δύο τέτοια κύματα.

δ. "Ας ζητήσουμε τώρα λύσεις, γιά κύμα πού διαδίδεται κάθετα πρός τό $\vec{B}_o$ $(\vartheta = 90^o)$ (" ἐ γ κ ά ρ σ ι α " δ ι ά δ ο σ η -transverse propagation).
Στήν περίπτωση αὐτή ἡ (6-70) δίνει δύο τιμές τοῦ β :

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{11}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{33}} \qquad (6\text{-}72)$$

καί

$$\beta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_{11}^2 - \varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{11}}} \qquad (6\text{-}73)$$

Μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι στήν πρώτη περίπτωση (6-72) τό $\vec{E}$ εἶναι γραμμικά πολωμένο παράλληλα πρός τό $\vec{B}_o$ ὁπότε, ὅπως φαίνεται ἀπό τήν (6-72) ἡ διάδοση γίνεται σάν νά μήν ὑπῆρχε τό μαγνητικό πεδίο.
Τό κύμα τότε λέγεται τ α κ τ ι κ ή ἀ κ τ ί ν α (ordinary ray).

Στή δεύτερη περίπτωση τό κύμα εἶναι γραμμικά πολωμένο κάθετα πρός τό ἐξωτερικό πεδίο $\vec{B}_o$ καί λέγεται ἔ κ τ α κ τ η ἀ κ τ ί ν α (extraordinary ray)

'Από τά προηγούμενα βγάζουμε τό συμπέρασμα ὅτι στή γενικήπε-ρίπτωση γραμμικά πολωμένου κύματος κατά γωνία α ὡς πρός τό $\vec{B}_0$ μποροῦμε νά ἀναλύσουμε τό διάνυσμα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου σέ δύο συνιστῶσες: μιά παράλληλη καί μιά κάθετη πρός τό $\vec{B}_0$. Δηλαδή τό γραμμικά πολωμένο κύμα ἀποτελεῖται ἀπό μιά τακτική ἀκτίνα καί μιά ἔκτακτη ἀκτίνα .

Στήν περίπτωση τῆς ἔκτακτης ἀκτίνας ἀποδείχνεται ὅτι ὑπάρ-χει καί συνιστώσα διαμήκης τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ($\mathcal{E}_x \neq 0$) .

Γιά τήν τακτική ἀκτίνα βλέπουμε ὅτι ὁ δείκτης τῆς διάθλασης η εἶναι :

$$\eta = \left(\frac{c}{\omega}\right) \beta_1 = \sqrt{\varepsilon_{33}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \qquad (6\text{-}74)$$

δηλαδή βρίσκουμε τή σχέση διάδοσης χωρίς μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_0$, (ἀπό ὅπου καί τό ὄνομα τακτική).

ε. Λίγο πιό γενικές εἶναι οἱ ἐνδιάμεσες περιπτώσεις ὅπου τό θ εἶναι μικρό (σ χ ε δ ό ν δ ι α μ ή κ η ς δ ι ά δ ο σ η - quasi-longitudinal) ἤ εἶναι θ ≃ 90° (σ χ ε δ ό ν ἐ γ-κ ά ρ σ ι α δ ι ά δ ο σ η - quasi-transverse) .

Στόν πίνακα τῆς ἑπόμενης σελίδας συνοψίζονται οἱ σταθερές τῆς διάδοσης γιά τήν κάθε περίπτωση.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6-I

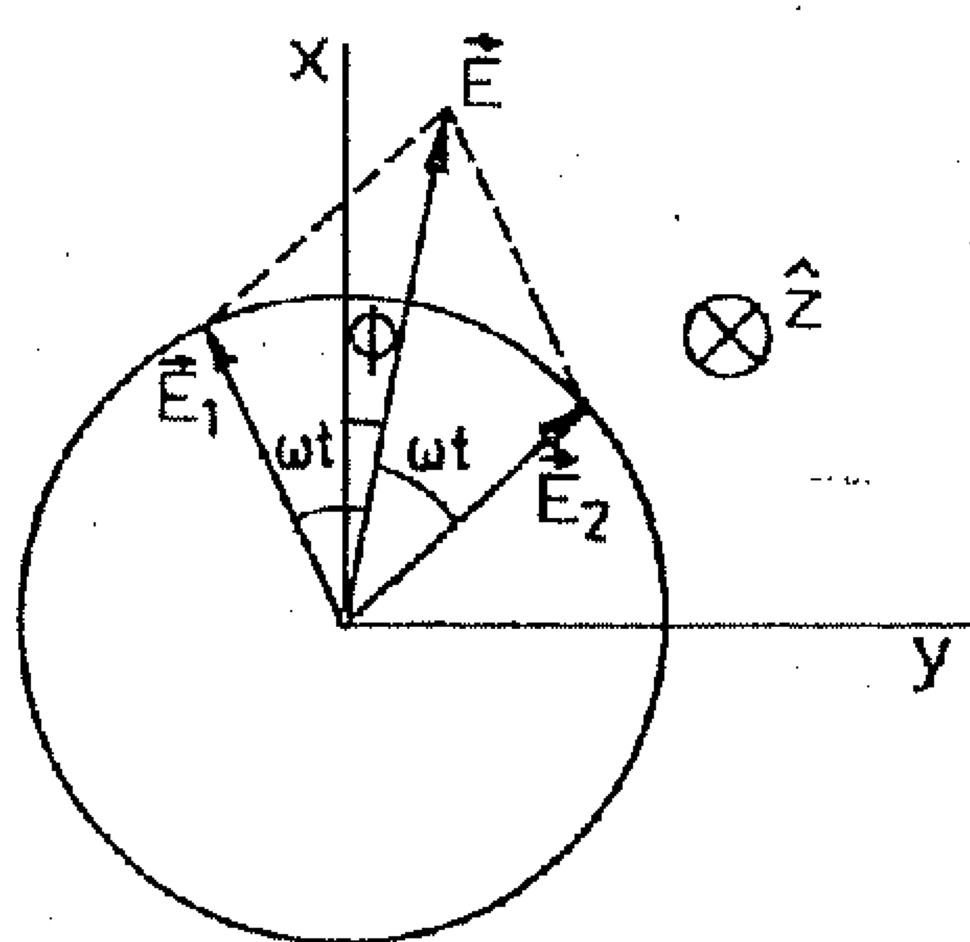
Σταθερές Διάδοσης στό Μαγνητόπλασμα

Σχεδόν διαμήκης διάδοση ($\vartheta \simeq 0^o$) (ἤ $\vartheta \simeq 180^o$)	$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{11} \pm \varepsilon_{12} \cos\vartheta}$
Σχεδόν ἐγκάρσια " ($\vartheta \simeq 90^o$)	$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{11} - (1 \pm 1)\frac{\varepsilon_{12}^2}{2\varepsilon_{11}} \sin^2\vartheta}$
Διαμήκης " ($\parallel \vec{B}_o$ $\vartheta = 0^o$)	$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{11} \pm \varepsilon_{12}}$
Ἐγκάρσια " ($\perp \vec{B}_o, \vartheta = 90^o$) — Τακτική ἀκτίνα : $\vec{E} \parallel \vec{B}_o$ — Ἔκτακτη ἀκτίνα : $\vec{E} \perp \vec{B}_o$	 $\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{33}}$ $\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_{11}^2 - \varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{11}}}$
Γιά ω ἀρκετά μεγαλύτερο ἀπό τό ω_g καί : $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ καί $\varepsilon_{12} = \frac{\omega_p^2\, \omega_g}{\omega(\omega_g^2 - \omega^2)} \simeq -\frac{\omega_p^2\, \omega_g}{\omega^3}$	

6.4. Στροφή Faraday.

Τό 1845 ὁ Faraday ἀνακάλυψε ὅτι ὁρισμένες οὐσίες γίνονται ὀπτικά "ἐνεργές" ὅταν τοποθετηθοῦν σέ μαγνητικό πεδίο παράλληλο μέ τή διεύθυνση τῆς διάδοσης τοῦ φωτός.
Ὅταν δηλ. διαδίδεται μέσα τους γραμμικά πολωμένο φῶς, τό ἐπίπεδο πόλωσής του στρέφεται σέ γωνία ἀνάλογη πρός τήν ἔνταση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καί ἀνάλογη πρός τό μῆκος τῆς διαδρομῆς μέσα στήν οὐσία. Τό φαινόμενο αὐτό παρατηρεῖται καί στό μάγνητόπλασμα καί τό μελετᾶμε παρακάτω.

Ὅπως εἴδαμε στήν προηγούμενη παράγραφο, σχεδόν διαμήκης , ἤ διαμήκης, διάδοση μέσα στό μαγνητόπλασμα εἶναι δυνατό νά γίνει ὅταν τό κύμα εἶναι δεξιόστροφα ἤ ἀριστερόστροφα κυκλικά πολωμένο καί στήν κάθε περίπτωση ἡ σταθερά τῆς διάδοσης δίνεται στόν Πίνακα 6-Ι



Σχ. 6-4.

Ἕνα γραμμικά πολωμένο κύμα, ὅμως, μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ δυό κυκλικά πολωμένα μέ ἀντίρροπη πόλωση-δεξιόστροφο καί ἀριστερόστροφο.

Τό σχ. 6-4 δείχνει πῶς δύο κυκλικά πολωμένα κύματα $\vec{E}_1$ καί $\vec{E}_2$ μέ ἴσα πλάτη καί ἀντίρροπη πόλωση συνθέτουν ἕνα γραμμικά πολωμένο κύμα, πού σχηματίζει γωνία Φ μέ τόν ἄξονα x .

Κάθε ἕνα ἀπό αὐτά τά δύο κυκλικά πολωμένα κύματα μπορεῖ νά διαδοθεῖ καί μέσα στό μαγνητόπλασμα καί μάλιστα μέ τή δική του σταθερά φάσης.

Στήν περίπτωση τῆς "σχεδόν διαμήκους" διάδοσης ἡ σταθερά φάσης γιά τό κάθε κύμα εἶναι :

$$\beta^{\pm} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{11} \pm \varepsilon_{12}\cos\vartheta} \qquad (6\text{-}75)$$

Οἱ στοιχειώδεις μεταβολές φάσης τῶν δύο κυμάτων γιά μιά στοιχειώδη μετακίνηση dl θά δίνονται ἀπό τίς :

$$d\Phi_1 = \beta^- dl \qquad (6\text{-}76)$$

$$d\Phi_2 = \beta^+ dl \qquad (6\text{-}77)$$

Λόγω τῆς ἀνισότητας τῶν σταθερῶν β γιά τά δύο κύματα, τό ἐπίπεδο πολώσεως τοῦ ὁλικοῦ πεδίου θά ὑποστεῖ μιά στοιχειώδη στροφή:

$$d\Phi = \frac{\beta^- - \beta^+}{2} dl \qquad (6\text{-}78)$$

Γιά τή σχεδόν διαμήκη διάδοση (ql) ὁ ἄξονας τῆς διάδοσης σχηματίζει μέ τόν ἄξονα z τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μικρή γωνία $\vartheta \simeq 0$. Ὑποθέτοντας ὅτι $\omega \gg \omega_g$ καί $\omega \gg \omega_p$ μπορεῖ ν' ἀποδείξει κανείς ὅτι*) :

$$\frac{\beta^- - \beta^+}{2} \simeq \frac{1}{2c}\frac{\omega_p^2\,\omega_g}{\omega^2}\cos\vartheta \qquad (6\text{-}79)$$

---

*) Εἶναι $\beta^- = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2\,\omega_g}{\omega^3}\cos\vartheta} = \frac{\omega}{c}(1-x)^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ ὅπου

$$x = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2\,\omega_g}{\omega^3}\cos\vartheta = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{\omega_g}{\omega}\cos\vartheta\right) << 1$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο $\beta^+ = \frac{\omega}{c}(1-x')^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{x'}{2}\right)$ ὅπου

$$x' = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2\,\omega_g}{\omega^3}\cos\vartheta << 1$$

Ὥστε: $\frac{\beta^- - \beta^+}{2} = \frac{\omega}{2c}\left(\frac{x' - x}{2}\right) = \frac{1}{2c}\frac{\omega_p^2\,\omega_g}{\omega^2}\cos\vartheta$

Θέτοντας

$\omega_g = \frac{eB_o}{m}$, $\omega = 2\pi f$ καί $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_o m}$ ἔχουμε :

$$\frac{\beta^- - \beta^+}{2} = \frac{Ne^3 B_o \cos\vartheta}{8\pi^2 c\,\varepsilon_o m^2 f^2}$$

ή $$\frac{\beta_- - \beta_+}{2} = \frac{Ne^3 B_o \cos\vartheta}{8\pi^2 c\,\varepsilon_o m^2 f^2} \qquad (6\text{-}80)$$

Ὥστε ἡ στοιχειώδης "στροφή Faraday" $d\Phi_{ql}$ γιά τή σχεδόν διαμήκη διάδοση εἶναι :

$$\boxed{d\Phi_{ql} = \frac{Ne^3 B_o \cos\vartheta}{8\pi^2 c\,\varepsilon_o m^2 f^2}\,dl} \qquad (6\text{-}81)$$

Ἄν τ εἶναι τό ὁλικό μῆκος τῆς διαδρομῆς μέσα στό μαγνητόπλασμα, τότε ἡ " ὁλική στροφή Faraday" γιά τή σχεδόν διαμήκη διάδοση εἶναι :

$$\boxed{\Phi_{ql} = \frac{e^3}{8\pi^2 c\,\varepsilon_o m^2 f^2}\int_0^{\tau} N B_o \cos\vartheta\, dl} \qquad (6\text{-}82)$$

Ἄν τά B_o καί θ εἶναι σταθερά τότε ἔχουμε :

$$\Phi_{ql} = \frac{e^3 B_o \cos\vartheta}{8\pi^2 c\,\varepsilon_0 m^2 f^2}\int_0^{\tau} N dl \qquad (6\text{-}83)$$

ἤ σέ πρακτική μορφή :

$$\Phi_{ql\,(\text{ἀκτίνια})} = \frac{2{,}36\cdot 10^{-3}}{f^2_{(MHz)}}\int_0^{\tau} N_{(\frac{\eta\lambda}{cm^3})}\, B_{(Gauss)}\, dl \qquad (6\text{-}84)$$

Ἡ (6-83) μᾶς ἐπιτρέπει νά ὑπολογίσουμε τό μέγεθος :

$$N_\tau = \int_0^{\tau} N dl \qquad (6\text{-}85)$$

δηλ. τόν ὁλικό ἀριθμό ἠλεκτρονίων, πού ὑπάρχουν σέ μιά στήλη ἀπό τό ὑλικό μέ μῆκος τ καί μοναδιαία διατομή, ἄν ξέρουμε τά B_o καί θ καί μετρήσουμε τήν Φ_{ql} σέ κάποια συχνότητα f .

'Ανάλογα γιά τήν "σχεδόν εγκάρσια" διάδοση (quasi-transverse) όταν $\vartheta = 90^o$, βρίσκουμε :

$$d\Phi_{qt} = \frac{N e^4 B_o^2 \sin^2 \vartheta}{32\pi^3 c\, f^3 m^3 \varepsilon_o} dl \qquad (6\text{-}86)$$

$$\Phi_{qt} = \frac{e^4}{32\pi^3 c\, f^3 m^3 \varepsilon_o} \int_0^{\tau} N B_o^2 \sin^2\vartheta \, dl \qquad (6\text{-}87)$$

Γιά τίς ειδικές περιπτώσεις longitudinal ($\vartheta = 0$) καί transverse ($\vartheta = 90$) ή (6-81) καί ή (6-86) δίνουν :

$$d\Phi_l = \frac{N e^3 B_o}{8\pi^2 c\, \varepsilon_o m^2 f^2} dl \qquad (6\text{-}88)$$

$$d\Phi_t = \frac{N e^4 B_o^2}{32\pi^3 c f^3 m^3 \varepsilon_o} dl \qquad (6\text{-}89)$$

'Από τίς σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\frac{d\Phi_l}{d\Phi_t} = \frac{4\pi f m}{e B_o} = \frac{2 m \omega}{e B_o} \qquad (6\text{-}90)$$

Στήν περίπτωση τῆς γήινης ιονόσφαιρας, γιά μιά συχνότητα f=100 MHz καί μέ B_o = 0,5 Gauss = 5 x 10^{-5} Tesla, ὁ λόγος αὐτός εἶναι περίπου 100.

Παρατηρήσεις

- "Οταν στό σημεῖο τῆς λήψης φτάνουν "ακτίνες" από διαφορετικές τροχιές (multipath) τότε τό ολοκλήρωμα $\int_0^{\tau} N B_o \cos\vartheta \, dl$ ἔχει διαφορετική τιμή γιά καθεμιά από αυτές.

Οἱ διαφορές αὐτές στή στροφή Faraday τείνουν νά " αποπολώσουν "

τό ἀρχικό κύμα, νά μειώσουν δηλ. τό βαθμό πόλωσής του.

● Ἡ στροφή Faraday εἶναι ἀντίστροφα ἀνάλογη μέ τό τετράγωνο τῆς συχνότητας. Ἔτσι ἕνα κύμα πού δέν εἶναι μονοχρωματικό τείνει νά ἀποπολωθεῖ.

● Οἱ δυό παραπάνω λόγοι ἀποπόλωσης α) ἀπό διάδοση σέ ἀνομοιογενές μέσο καί β) ἀπό " διαφορική στροφή Faraday " γιά τίς διάφορες συχνότητες ἑνός εὐρέος φάσματος, εἶναι ἰδιαίτερα δραστικοί στή λήψη σημάτων τῆς Ραδιοαστρονομίας.

Γιά νά παρατηρήσουμε ἔστω καί μικρό βαθμό γραμμικῆς πόλωσης ἀπό πηγές μέ περιορισμένες γωνιακές διαστάσεις χρειάζονται δύο φροντίδες στά πειραματικά μέσα.

α) Μεγάλη αὔξηση τῆς κατευθυντικότητας τῆς κεραίας, δηλ. περιορισμός τῆς γωνιακῆς διασπορᾶς τῶν "ἀκτίνων" πού συγκεντρώνουμε καί

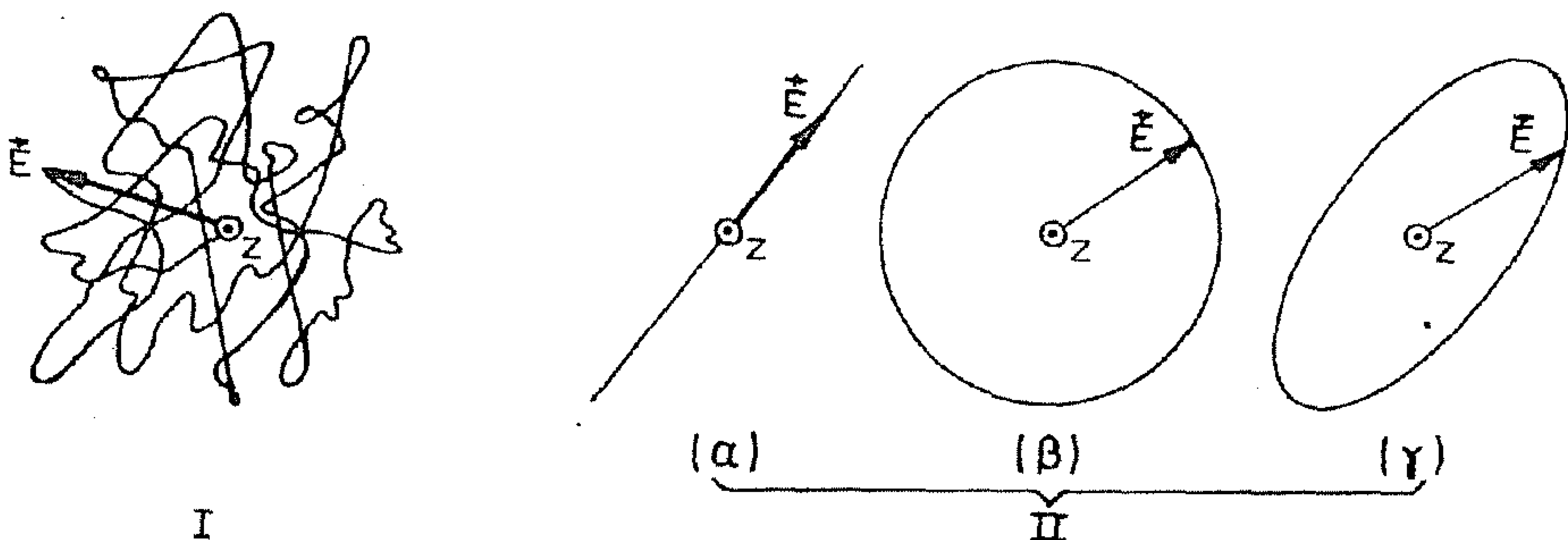
β) Μικρό εὖρος ζώνης συχνοτήτων τοῦ δέκτη.

7. ΠΟΛΩΣΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ.

Στό Κεφάλαιο αὐτό, ἀφοῦ εἰσαχθεῖ ἡ ἔννοια τῆς πόλωσης, περιγράφεται τό ὁλικά πολωμένο Η.Μ. κύμα σάν ἐπαλληλία δύο γραμμικά πολωμένων κυμάτων, κάθετων μεταξύ τους, ἤ δύο κυκλικά πολωμένων κυμάτων μέ ἀντίστροφη πόλωση. Δίνονται οἱ παράμετροι τῆς πόλωσης, εἰσάγεται ἡ ἔννοια τοῦ μερικά πολωμένου κύματος καί ὁρίζονται οἱ παράμετροι τοῦ Stokes καί ἡ μήτρα συνεκτικότητας.

7.1. Ὁλικά Πολωμένο Κύμα.

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα μέ διεύθυνση διαδόσεως κατά τόν ἄξονα Oz κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ χαρτιοῦ καί ἄς ἀσχοληθοῦμε μέ τήν ἠλεκτρική συνιστώσα του σ' ἕνα ὁρισμένο σημεῖο z (βλ. σχ. 7.1). Τό διάνυσμα $\vec{E}$ θά βρίσκεται κάθε χρονική στιγμή στό ἐπίπεδο τοῦ σχήματος καί τό ζήτημα πού μπαίνει εἶναι τί εἴδους γραμμή διαγράφει τό ἄκρο τοῦ $\vec{E}$ στίς διάφορες χρονικές στιγμές.



Σχ. 7-1. I. Ἀπόλωτο κύμα, II. (α) Γραμμικά, (β) Κυκλικά, ἤ (γ) ἐλλειπτικά πολωμένο κύμα.

Μποροῦμε νά διακρίνουμε δύο ἀκραῖες βασικές περιπτώσεις :

Στήν πρώτη, ἡ γραμμή αὐτή εἶναι τελείως ἀκανόνιστη καί τότε μιλᾶμε γιά "ἀπόλωτο" κύμα (ἤ τυχαία πολωμένο) (σχ. 7.1-I)

Στήν δεύτερη, ὁ γ.τόπος τοῦ ἄκρου μπορεῖ νά εἶναι (α) εὐθύγραμμο τμῆμα, ὁπότε ἔχουμε "γραμμική πόλωση" , (β) περιφέρεια κύκλου, ("κυκλική πόλωση") ἤ γενικότερα (γ) ἔλλειψη , (" ἐλλειπτική πόλωση ") ὅπως,ἀντίστοιχα,φαίνεται στά σχήματα (II) .

Θά ἀρχίσουμε μέ τήν ἐξέταση ἁρμονικοῦ κύματος στή γενική περίπτωση ἐλλειπτικῆς πόλωσης.

Τό ἐλλειπτικά πολωμένο κύμα μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ εἴτε (α) σέ δύο γραμμικά πολωμένα κύματα κάθετα μεταξύ τους εἴτε (β) σέ δύο κυκλικά πολωμένα κύματα, τό ἕνα δεξιόστροφο καί τό ἄλλο ἀριστερόστροφο.

Σχ. 7-2. Παράμετροι τῆς ἐλλειπτικῆς πόλωσης .

θά παραλείψουμε τόν όρο βz τῆς φασικῆς ἐξέλιξης τοῦ κύματος κατά τόν ἄξονα z (πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ χαρτιοῦ μας) καί θά θεωρήσουμε τή διάδοση τοῦ κύματος κατά τόν ἄξονα z, ὁπότε ἡ ἠλεκτρική συνιστῶσα $\vec{E}$ βρίσκεται στό ἐπίπεδο xy (βλ.σχ.7-2)

α. Περιγραφή μέ ἐπαλληλία "γραμμικά πολωμένων κυμάτων".

Οἱ συνιστῶσες τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στίς διευθύνσεις x , y εἶναι,ἀντίστοιχα :

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_{xo}\cos\omega t \\ E_y &= E_{yo}\cos(\omega t+\delta) \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}1)$$

ὅπου δ εἶναι ἡ διαφορά φάσης τῶν δύο συνιστωσῶν.
Ὥστε εἶναι :

$$\vec{E} = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y \qquad (7\text{-}2)$$

Ἄν ΟΑ εἶναι τό μῆκος τοῦ μεγάλου ἡμιάξονα τῆς ἔλλειψης καί ΟΒ τό μῆκος τοῦ μικροῦ , ορίζεται τό ἀξονικό πηλίκο (ΑΠ) :

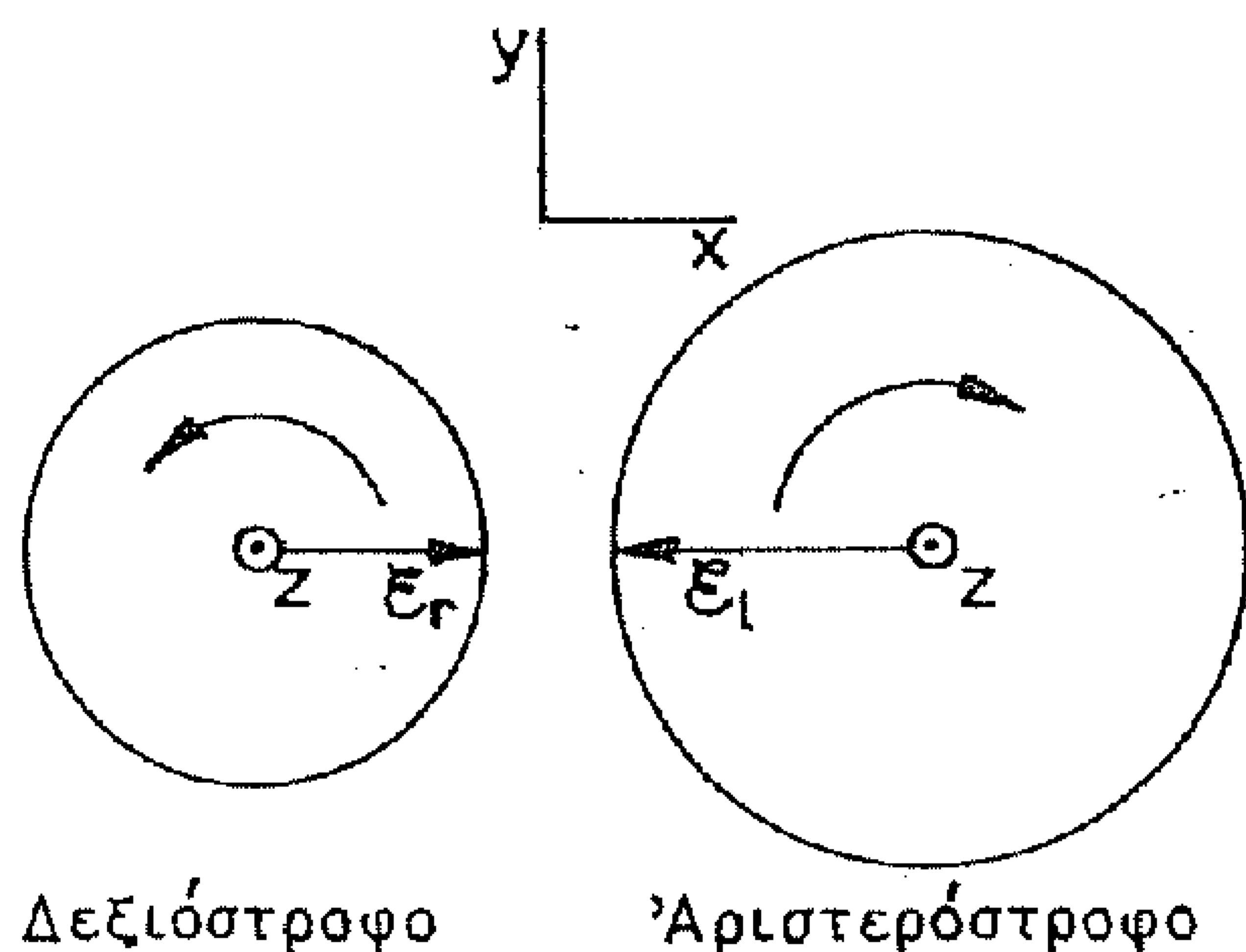
$$A\Pi = \frac{OA}{OB} \quad , \quad 1 \leqslant A\Pi \leqslant \infty \qquad (7\text{-}3)$$

β. Περιγραφή μέ ἐπαλληλία "κυκλικά πολωμένων κυμάτων".

Ἰσχύουν οἱ σχέσεις :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_r &= E_R e^{j\omega t} \\ \mathcal{E}_l &= E_L e^{-j(\omega t+\delta')} \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4)$$

Οἱ δύο προηγούμενες περιγραφές συνδέονται μεταξύ τους μέ τίς σχέσεις :



Σχ. 7-3. Δεξιόστροφο καί Ἀριστερόστροφο κυκλικά πολωμένο κύμα.

$$\left.\begin{aligned} E_x &= Re\left[\mathcal{E}_r + \mathcal{E}_l\right] \\ E_y &= Im\left[\mathcal{E}_r + \mathcal{E}_l\right] \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}5)$$

ἤ ἀκόμα :

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_R\cos\omega t + E_L\cos(\omega t+\delta') \\ E_y &= E_R\sin\omega t - E_L\sin(\omega t+\delta') \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}6)$$

Στό πίνακα τῆς ἐπόμενης σελίδας δίνονται οἱ παράμετροι γ,δ, ε καί τ πού εἰκονίζονται στό σχ. 7-2, οἱ σχέσεις πού τίς ορίζουν καθώς καί οἱ τιμές πού παίρνουν οἱ παράμετροι αὐτές στίς εἰδικές περιπτώσεις τῆς γραμμικῆς καί τῆς κυκλικῆς πόλωσης.

7.2. Ἡ Σφαίρα τοῦ Poincaré.

Οἱ παράμετροι γ,δ,ε καί τ, πού ορίζονται στό πίνακα τῆς ἐπόμενης σελίδας συνδέονται μέ τίς παρακάτω σχέσεις (Poincare 1892 Deschamps 1951).

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\gamma &= \cos 2\epsilon \cdot \cos 2\tau \\ \tan\delta &= \frac{\tan 2\epsilon}{\sin 2\tau} \end{aligned}} \quad (7\text{-}7)$$

ἤ

$$\boxed{\begin{aligned} \tan 2\tau &= \tan 2\gamma \cos\delta \\ \sin 2\epsilon &= \sin 2\gamma \sin\delta \end{aligned}} \quad (7\text{-}8)$$

Οἱ προηγούμενες τέσσερες σχέσεις ἐπιτρέπουν τό πέρασμα :

$$(\gamma, \delta) \Longleftrightarrow (\varepsilon, \tau)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 7-I

Παράμετροι τῆς Ἐλλειπτικῆς Πόλωσης

	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	ΟΡΙΣΜΟΣ	ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	γ	$\gamma = \arctan \frac{E_{yo}}{E_{xo}}$ $0 \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}$ ὅπου E_{xo}, E_{yo} τά πλάτη τῆς ταλάντωσης στούς ἄξονες x καί y.	γραμμική πόλωση ὁριζόντια: $\gamma = 0$ κατακόρυφη: $\gamma = \frac{\pi}{2}$ μέ γωνία α: $\gamma = \alpha$ κυκλική πόλωση: $\gamma = \frac{\pi}{4}$
	δ	Ἡ διαφορά φάσης τῆς συνιστώσας $\mathcal{E}_y$ ὡς πρός τήν $\mathcal{E}_x$: $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_x \tan\gamma\, e^{j\delta}$ $-\pi \leqslant \delta \leqslant +\pi$	γραμμική πόλωση: $\delta = 0$ κυκλική πόλωση δεξιόστροφη: $\delta = -\frac{\pi}{2}$ ἀριστερόστροφη: $\delta = \frac{\pi}{2}$
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ϵ	$\epsilon = \mathrm{arccot}(\mp \mathrm{ΑΠ})$ $-\frac{\pi}{4} \leqslant \epsilon \leqslant \frac{\pi}{4}$ ὅπου ΑΠ τό ἀξονικό πηλίκο: $\mathrm{ΑΠ} = \frac{\mathrm{ΟΑ}}{\mathrm{ΟΒ}}$	γραμμική πόλωση (ΑΠ=∞) $\epsilon = 0$ κυκλική πόλωση (ΑΠ=1) δεξιόστροφη: $\epsilon = -\frac{\pi}{4}$ ἀριστερόστροφη: $\epsilon = \frac{\pi}{4}$
	τ	Ἡ γωνία τοῦ μεγάλου ἄξονα τῆς ἔλλειψης μέ τόν ἄξονα x (προσανατολισμός τῆς ἔλλειψης): $0 \leqslant \tau \leqslant \pi$	γιά γραμμικά πολωμένο κύμα μέ γωνία πόλωσης α εἶναι: $\tau = \alpha = \gamma$

καί θυμίζουν σχέσεις τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας, ἀπό ὅπου καί ἡ ἰδέα τῆς κατασκευῆς τῆς σφαίρας, πού δείχνει τό σχ. 7-4 καί πού λέγεται σ φ α ί ρ α τ ο ῦ P o i n c a r é .



Σχ. 7-4. Στή σφαίρα τοῦ Poincare κάθε ζευγάρι (δ,γ) ἤ (ε,τ) δίνει ἕνα σημεῖο πού ὁρίζει τελείως τό εἶδος τῆς ὁλικῆς πόλωσης.

Πάνω στή σφαίρα τοῦ Poincare κάθε σημεῖο $P(\varepsilon,\tau)$ ἤ $P(\gamma,\delta)$ ὁρίζει τελείως τά χαρακτηριστικά τοῦ ὁλικά πολωμένου κύματος. Στή σφαίρα τοῦ Poincaré τοῦ σχ. 7-4 εἶναι σημειωμένες μερικές εἰδικές περιπτώσεις κατάστασης πόλωσης. Γενικά, κάθε σημεῖο τοῦ πάνω ἡμισφαιρίου ἀντιπροσωπεύει ἀριστερόστροφη ἐλλειπτική πόλωση, πού στόν πόλο γίνεται κυκλική ἐνῶ στόν ἰσημερινό γραμμική. Τά ἀντίστροφα συμβαίνουν στό κάτω ἡμισφαίριο.

7.3. Ἀπόκριση Κεραίας σέ Ὁλικά Πολωμένο Κῦμα.

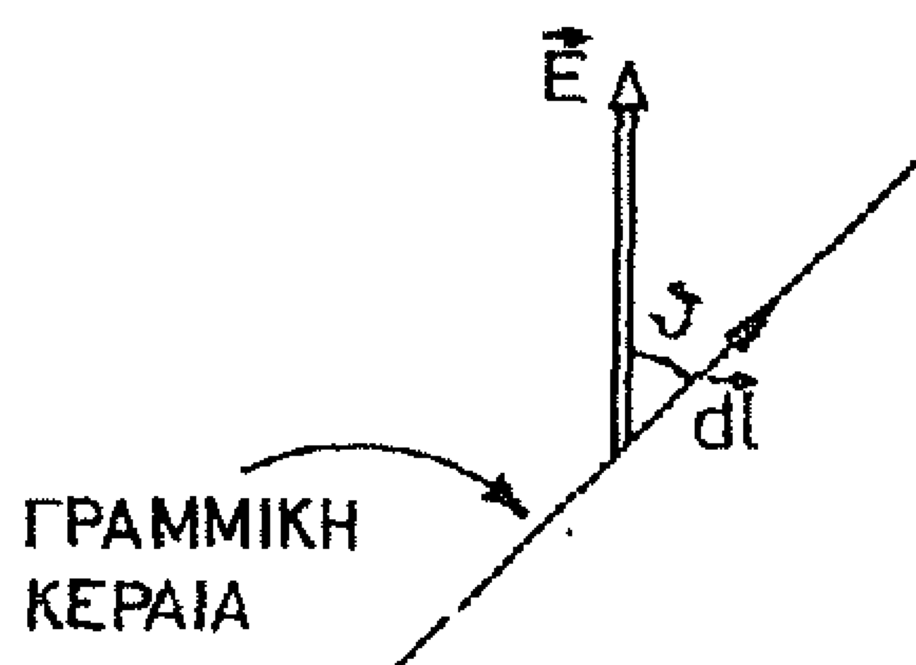
Ἡ ἀπόκριση τῆς κεραίας ἑνός δέκτη δίνεται ἀπό τήν τάση, πού ἀναπτύσσεται σ' αὐτήν ὅταν πέσει πάνω της κῦμα μέ ἔνταση $\vec{E}$. Στήν περίπτωση γραμμικά πολωμένου κύματος καί γραμμικά πολωμένης κεραίας ἡ τάση αὐτή ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση:

$$V = \int_0^l \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (7\text{-}9)$$

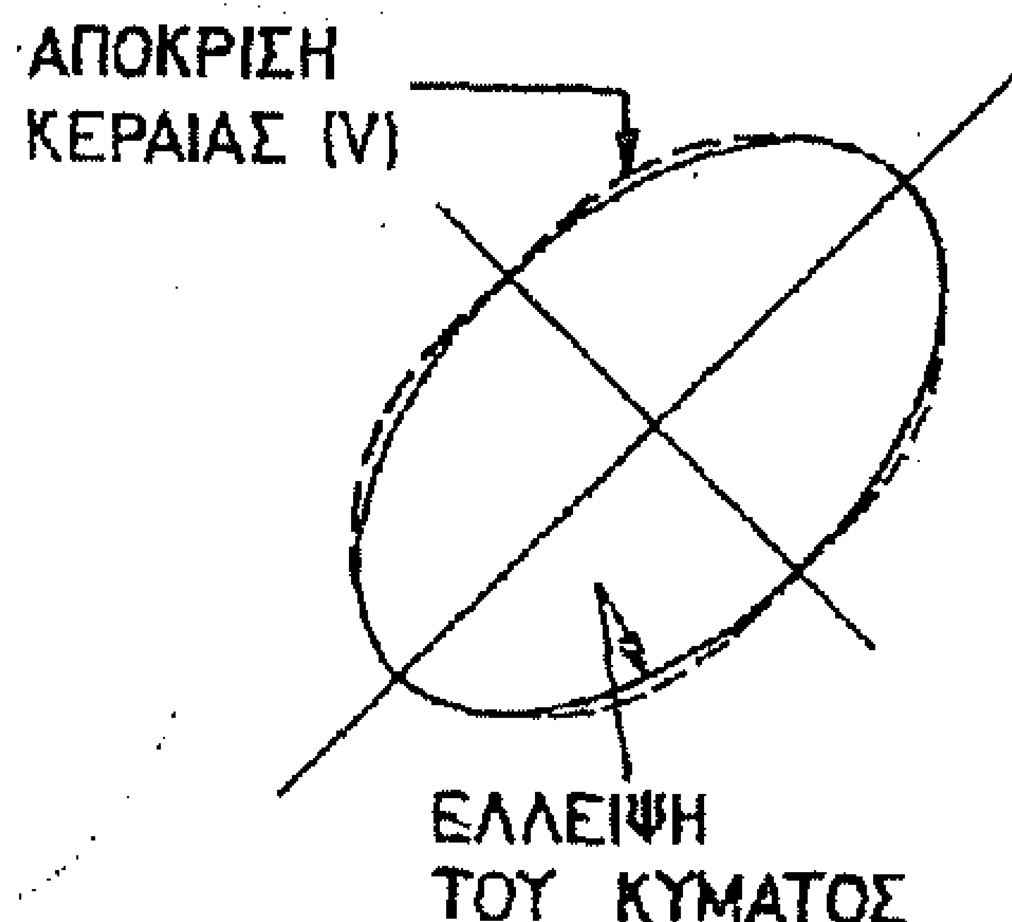
ἤ

$$V = El\cos\vartheta \qquad (7\text{-}10)$$

ὅπου l τό ἐνεργό μῆκος τῆς κεραίας (βλ. σχ. 7-5)



Σχ. 7-5



Σχ. 7-6. Ἀπόκριση γραμμικά πολωμένης κεραίας σέ ἐλλειπτικά πολωμένο κύμα

Στή γενική περίπτωση ἑνός ἐλλειπτικά πολωμένου κύματος τό πλάτος τοῦ $\vec{E}$ εἶναι :

$$E_o = \sqrt{E_{xo}^2 + E_{yo}^2} \qquad (7\text{-}11)$$

Ἄν στρέψουμε τήν κεραία ἀργά-ἀργά ἡ τάση V θά ἀλλάζει καί τελικά θά πάρουμε μιά ἐξέλιξη διαφορετική ἀπό τήν ἔλλειψη τοῦ πολωμένου κύματος, ὅπως δείχνει τό σχ. 7-6 .

Ἄν $M_\alpha(\epsilon,\tau)$ εἶναι τό παραστατικό σημεῖο τῆς πόλωσης μιᾶς κεραίας, πάνω στή σφαίρα τοῦ Poincare καί $M(\epsilon',\tau')$ τό ἀντίστοιχο σημεῖο τῆς πόλωσης τοῦ κύματος, τότε ἡ ἐπαγόμενη τάση εἶναι γενικά :

$$\boxed{V = El\cos\frac{\widehat{MM_\alpha}}{2}} \qquad (7\text{-}12)$$

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή :

Γιά $\widehat{MM_\alpha}=0^o$ εἶναι V = max καί ἔχουμε προσαρμογή κεραίας-κύματος.
Γιά $\widehat{MM_\alpha}=180^o$ τό V=0 (ὅπως π.χ. συμβαίνει (i) μέ κυκλική δεξιόστροφη κεραία καί κυκλικό ἀριστερόστροφο κύμα ἤ (ii) μέ κεραία ὁριζόντιας γραμμικῆς πόλωσης καί κύμα κατακόρυφα γραμμικά πολωμένο).

7.4. Μερικά Πολωμένο Κύμα. Παράμετροι Stokes.

Ὡς ἐδῶ ἐξετάσαμε τελείως (ὁλικά) πολωμένα Η.Μ. κύματα, δηλαδή κύματα ὅπου τά E_{xo} , E_{yo} καί δ εἶναι σταθερά (ἤ τουλάχιστον μεταβάλλονται ἀργά μέ τό χρόνο). Μιά τέτοια περίπτωση εἶναι ἡ ἀκτινοβολία ἑνός μονοχρωματικοῦ πομποῦ. Συνήθως ὅμως, ἡ ἐκπομπή ἀπό μιά " φυσική " πηγή ἐκτείνεται σέ σημαντικό εὖρος ζώνης συχνοτήτων καί μέσα σ' αὐτό κάθε μικρό εὖρος Δf συνίσταται ἀπό τήν ἐπαλληλία ἑνός μεγάλου ἀριθμοῦ στατιστικά ἀνεξάρτητων κυμάτων μέ ποικιλία πολώσεων. Τό κύμα πού προκύπτει λέγεται "τ υ χ α ῖ α π ο λ ω μ έ ν ο κ ύ μ α" ἤ "τ ε λ ε ί ω ς ἀ π ό λ ω τ ο κ ύ μ α".

Γιά ἕνα τέτοιο κύμα μποροῦμε νά γράψουμε :

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_{xo}(t)\cos\omega t \\ E_y &= E_{yo}(t)\cos\left[\omega t+\delta(t)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}13)$$

ὅπου ὅλες οἱ χρονικές συναρτήσεις εἶναι ἀνεξάρτητες μεταξύ τους. Οἱ χρονικές μεταβολές $E_{xo}(t)$, $E_{yo}(t)$ καί δ(t) εἶναι σχετικά ἀργές.

Ἕνα τέτοιο τ ε λ ε ί ω ς ἀ π ό λ ω τ ο κύμα παίρνουμε ὅταν π.χ δύο ἀνεξάρτητες μεταξύ τους " γεννήτριες θορύβου" τροφοδοτοῦν (α) δύο κάθετα μεταξύ τους δίπολα (καί δημιουργοῦν δύο κάθετα γραμμικά πολωμένα τυχαῖα πεδία) ἤ (β) δύο ἑλικοειδεῖς κεραῖες μέ ἀντίθετες σπεῖρες (δημιουργώντας ἔτσι δύο ἀντίστροφα κυκλικά πολωμένα τυχαῖα κύματα). Ὅπως θά δοῦμε ὅμως, γιά νά προκύψει τελείως ἀπόλωτο κύμα, θά πρέπει οἱ δύο γεννήτριες νά ἀκτινοβολοῦν τήν ἴδια μέση ἰσχύ καί τά σήματά τους νά εἶναι τελείως ἀσυσχέτιστα.

Μ ε ρ ι κ ά π ο λ ω μ έ ν ο κ ύ μ α : Ἡ πιό γενική περίπτωση κύματος εἶναι ἐκείνη ὅπου τό κύμα εἶναι "μερικά"πολωμένο, δηλαδή ὅταν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπό δύο μέρη, τό ἕνα "τελείως πολωμένο" καί τό ἄλλο "τελείως ἀπόλωτο". Γιά τήν περιγραφή ἑνός τέτοιου κύματος εἶναι ἀναγκαῖες οἱ τ έ σ σ ε ρ ε ς π α ρ ά μ ε τ ρ ο ι τ ο ῦ S t o k e s (G. Stokes 1852, Chandrasekhar 1950)

Καταρχήν ὁρίζουμε τίς τέσσερις παραμέτρους τοῦ Stokes γιά τήν περίπτωση τελείως πολωμένου κύματος.

7.4.1. Παράμετροι Stokes γιά ὁλικά πολωμένο κύμα.

Οἱ ἐξισώσεις (7-1) γράφονται :

$$\left.\begin{array}{l} E_x = E_{xo}\cos(\omega t+\delta_1) \\ E_y = E_{yo}\cos(\omega t+\delta_2) \end{array} \quad \text{μέ} \quad \delta_2-\delta_1=\delta \right\} \quad (7\text{-}14)$$

Στό σύστημα τῶν ἀξόνων x΄y΄ τοῦ σχήματος 7-2 οἱ προβολές τοῦ $\vec{E}$ θά εἶναι :

$$\left.\begin{array}{l} E_{x'} = E_o\cos\epsilon\ \cos\omega t \\ E_{y'} = E_o\sin\epsilon\ \sin\omega t \end{array}\right\} \quad (7\text{-}15)$$

καί μέ στροφή τῶν ἀξόνων ἀπό τούς x΄y΄ στούς xy :

$$\left.\begin{array}{l} E_x = E_{x'}\cos\tau - E_{y'}\sin\tau \\ E_y = E_{x'}\sin\tau + E_{y'}\cos\tau \end{array}\right\} \quad (7\text{-}16)$$

Ἀπό τίς (7-15) καί (7-16) μέ ἀπαλοιφή τῶν $E_{x'}$ καί $E_{y'}$ προκύπτουν:

$$\left.\begin{array}{l} E_x = E_o(\cos\epsilon \cos\tau \cos\omega t - \sin\epsilon \sin\tau \sin\omega t) \\ E_y = E_o(\cos\epsilon \sin\tau \cos\omega t + \sin\epsilon \cos\tau \sin\omega t) \end{array}\right\} \quad (7\text{-}17)$$

'Απαλείφοντας τά $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ ἀπό τίς (7-14) καί (7-17) παίρνουμε :

$$\left.\begin{array}{l} E_{xo} = E_o\sqrt{\cos^2\epsilon \cos^2\tau + \sin^2\epsilon \sin^2\tau} \\ E_{yo} = E_o\sqrt{\cos^2\epsilon \sin^2\tau + \sin^2\epsilon \cos^2\tau} \end{array}\right\} \quad (7\text{-}18)$$

'Από τίς (7-18) προκύπτει εὔκολα ὅτι :

$$E_{xo}^2 + E_{yo}^2 = E_o^2 \qquad (7\text{-}19)$$

"Αν S_x εἶναι τό πλάτος τοῦ διανύσματος Poynting*) τῆς πολωμένης κατά τόν ἄξονα x συνιστώσας καί S_y τό ἀντίστοιχο πλάτος τῆς πολωμένης κατά τόν ἄξονα y συνιστώσας, ὁρίζεται τό μέγεθος:

$$S = S_x + S_y = \frac{E_{xo}^2 + E_{yo}^2}{Z} = \frac{E_o^2}{Z} \qquad (7\text{-}20)$$

'Από τίς (7-18) καί (7-20) προκύπτουν :

$$\boxed{\begin{array}{l} S_x = \dfrac{E_{xo}^2}{Z} = S(\cos^2\epsilon \cos^2\tau + \sin^2\epsilon \sin^2\tau) \\ S_y = \dfrac{E_{yo}^2}{Z} = S(\cos^2\epsilon \sin^2\tau + \sin^2\epsilon \cos^2\tau) \end{array}} \qquad (7\text{-}21)$$

Οἱ παράμετροι I, Q, U καί V τοῦ Stokes γιά ἕνα ὁλικά πολωμένο κῦμα μέ τά στοιχεῖα S_x,

---

*) Θυμίζουμε ὅτι ἐπειδή τό διάνυσμα Poynting εἶναι $\vec{P} \triangleq \vec{E} \times \vec{H}$ καί ἡ κυματική ἀντίσταση τοῦ μέσου διαδόσεως εἶναι $Z \triangleq \frac{E}{H}$ ἔχουμε ὅτι $P = \frac{E^2}{Z}$. Στό κεφάλαιο αὐτό ἀντί τοῦ συμβόλου P χρησιμοποιοῦμε τό σύμβολο S ὅπως συνηθίζεται στή σχετική μέ τήν πόλωση βιβλιογραφία.

S_y , ϵ, τ ὁρίζονται ὥς ἑξῆς :

$$I \triangleq S = S_x + S_y = \frac{E_{xo}^2}{Z} + \frac{E_{yo}^2}{Z}$$

$$Q \triangleq S_x - S_y = \frac{E_{xo}^2}{Z} - \frac{E_{yo}^2}{Z} = S\cos 2\epsilon \cos 2\tau \tag{7-22}$$

$$U \triangleq (S_x - S_y)\tan 2\tau = S\cos 2\epsilon \sin 2\tau = 2\frac{E_{xo}E_{yo}}{Z}\cos\delta$$

$$V \triangleq (S_x - S_y)\tan 2\epsilon \sec 2\tau = S\sin 2\epsilon = 2\frac{E_{xo}E_{yo}}{Z}\sin\delta$$

ὅπου $\delta = \delta_2 - \delta_1$.

(Μιά μνημοτεχνική παρατήρηση : Οἱ παράμετροι τοῦ Stokes θά μποροῦσαν νά θεωρηθοῦν σάν ἄθροισμα, διαφορά, βατική καί ἀβατική συνιστώσα ἰσχύος) .

'Από τίς (7-22) προκύπτουν οἱ σχέσεις :

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \tag{7-23}$$

$$\frac{U}{Q} = \tan 2\tau \tag{7-24}$$

καί

$$\frac{V}{S} = \sin 2\epsilon = \frac{V}{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}} \tag{7-25}$$

Χρησιμοποιώντας τό συμβολισμό μέ μήτρα-στήλη ὁρίζουμε τό " διάνυσμα τοῦ Stokes " :

$$[S_i] \triangleq \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ S\cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ S\cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ S\sin 2\epsilon \end{bmatrix} \tag{7-26}$$

Ἂν διαιρέσουμε τίς παραμέτρους τοῦ Stokes, πού ὁρίσαμε , διά S προκύπτουν οἱ κ α ν ο ν ι κ ο π ο ι η μ έ ν ε ς π α ρ ά μ ε τ ρ ο ι τ ο ῦ S t o k e s (ἤ ἀνηγμένες, normalized) καί ἀντίστοιχα τό κ α ν ο ν ι κ ο π ο ι η μ έ ν ο δ ι ά ν υ σ μ α τ ο ῦ S t o k e s :

$$\left[s_i\right] \triangleq \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \frac{1}{S}\left[S_i\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ \sin 2\epsilon \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}27)$$

Ἐφαρμογή σέ τρεῖς εἰδικές περιπτώσεις

1) Γιά ἀριστερόστροφο κυκλικά πολωμένο κύμα εἶναι , $S_x = S_y$, $A\Pi = 1$ καί $\epsilon = 45^o$, τ = ἀπροσδιόριστο .

Ὥστε ἀπό τίς (7-26) καί (7-27) ἔχουμε :

$$\left[S_i\right] \triangleq \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ 0 \\ S \end{bmatrix} , \quad \left[s_i\right] \equiv \frac{1}{S} \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}28)$$

2) Γιά δεξιόστροφο κυκλικά πολωμένο κύμα , ὅπου εἶναι $S_x = S_y$, $A\Pi = 1$, $\epsilon = -45^o$ καί τ = ἀπροσδιόριστο. Προκύπτει:

$$\left[S_i\right] \triangleq \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ 0 \\ -S \end{bmatrix} , \quad \left[s_i\right] \equiv \frac{1}{S} \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}29)$$

3) Γιά γραμμικά πολωμένο κύμα, μέ γωνία πόλωσης α , όπου εἶναι:

$\gamma = \alpha,\ \delta = 0\ ,\ \tau = \alpha\ ,\ \epsilon = 0$, προκύπτει :

$$\left[s_i\right] = \begin{bmatrix} S \\ S\cos 2\alpha \\ S\sin 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \left[s_i\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}30)$$

7.4.2. Οἱ Παράμετροι τοῦ Stokes γιά μερικά πολωμένο καί γιά τελείως ἀπόλωτο κύμα.

Στήν περίπτωση αὐτή ξαναγράφουμε τίς (7-14) ὡς ἑξῆς :

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_{xo}(t)\cos\left[\omega t + \delta_1(t)\right] \\ E_y &= E_{yo}(t)\cos\left[\omega t + \delta_2(t)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}31)$$

όπου $$\delta = \delta_2 - \delta_1 \qquad (7\text{-}32)$$

Γιά τόν ὁρισμό , τώρα, τῶν I,Q,U καί V εἶναι ἀνάγκη νά πάρουμε τ ή χ ρ ο ν ι κ ή μ έ σ η τ ι μ ή τῶν συναρτήσεων $E_{xo}(t)$ $E_{yo}(t)$, $\delta_1(t)$ καί $\delta_2(t)$. Συμβολίζοντας τόν τελεστή τῆς μέσης τιμῆς :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\ldots dt \qquad \text{μέ} \qquad \langle\cdots\rangle \qquad (7\text{-}33)$$

ἐντελῶς ἀνάλογα μέ τίς (7-22) ὁρίζουμε :

$$I \triangleq S = S_x + S_y = \frac{<E_{xo}^2>}{Z} + \frac{<E_{yo}^2>}{Z}$$

$$Q \triangleq S_x - S_y = \frac{<E_{xo}^2>}{Z} - \frac{<E_{yo}^2>}{Z} = S<\cos 2\varepsilon \cos 2\tau>$$

$$U \triangleq S<\cos 2\varepsilon \sin 2\tau> = \frac{2}{Z} <E_{xo} E_{yo} \cos\delta> \qquad (7\text{-}34)$$

$$V \triangleq S<\sin 2\varepsilon> = \frac{2}{Z} <E_{xo} E_{yo} \sin\delta>$$

όπου $\delta = \delta_2 - \delta_1$

Πρέπει νά τονιστεῖ ὅτι στίς παραπάνω σχέσεις τά ε, τ, δ, E_{xo} E_{yo} εἶναι τώρα συναρτήσεις τοῦ χρόνου.

Ἀπό τίς (7-34) χρησιμοποιώντας τή σχέση :

$$<x^2> \geqslant <x>^2 \qquad (7\text{-}35)$$

προκύπτει ὅτι :

$$\boxed{I^2 \geqslant Q^2 + U^2 + V^2} \qquad (7\text{-}36)$$

Ἀπό τίς (7-22) καί (7-34) φαίνεται ὅτι μόνο ἡ παράμετρος I ἐκφράζει τήν ὁλική ἰσχύ, ἐνῶ οἱ παράμετροι Q, U καί V περιέχουν χαρακτηριστικά μόνο τῆς πολωμένης ἰσχύος.

Ἐφαρμογή στό τελείως ἀπόλωτο κύμα :

Στήν ειδική περίπτωση τοῦ τελείως ἀπόλωτου κύματος ἔχουμε $S_x = S_y$, ἐνῶ τά $E_{xo}(t)$, $E_{yo}(t)$ εἶναι τελείως ἀσυσχέτιστα καί ἐπομένως εἶναι $<E_{xo}(t)\, E_{yo}(t) \cos\delta> = 0$ καί $<E_{xo}(t)\, E_{yo}(t) \sin\delta> = 0$. Ὥστε γιά τελείως ἀπόλωτο κύμα εἶναι :

$$[s_i] = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad [s_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7-37}$$

Ὁρίζουμε σάν β α θ μ ό π ό λ ω σ η ς τό πηλίκο :

$$d \triangleq \frac{\text{πολωμένη ἰσχύς}}{\text{ὁλική ἰσχύς}} = \frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I}$$	ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΩΣΗΣ

(7-38)

καί εἶναι: $$0 \leqslant d \leqslant 1 \tag{7-39}$$

Διαπιστώνουμε ἀπό τήν (7-38) ὅτι ἄν κάποιο ἀπό τά Q,U καί V εἶναι διάφορο ἀπό τό μηδέν τότε ὑπάρχει πολωμένη συνιστώσα ἰσχύος. Ὥστε ἡ συνθήκη $Q = U = V = 0$ εἶναι ἀναγκαία καί ἀρκετή γιά νά ἔχουμε τελείως ἀπόλωτο κύμα. Ὁ βαθμός πόλωσης d εἶναι μηδέν γιά τό τελείως ἀπόλωτο κύμα καί μονάδα γιά τό τελείως πολωμένο.

Δ ύ ο β α σ ι κ έ ς π ρ ο τ ά σ ε ι ς πού μποροῦν ν' ἀποδειχτοῦν εἶναι :

- Δύο κύματα μέ τίς ἴδιες παραμέτρους Stokes "ταυτίζονται" .
- Στήν περίπτωση, πού ἔχουμε ἐπαλληλία διάφορων ἀνεξάρτητων κυμάτων, οἱ παράμετροι Stokes τοῦ συνιστάμενου κύματος θά εἶναι τό ἄθροισμα τῶν παραμέτρων Stokes τῶν ἐπιμέρους κυμάτων.

Ἡ παρουσία τῆς ἀπόλωτης συνιστώσας μπορεῖ νά ἀναδειχτεῖ, ἄν ξαναεκφράσουμε τίς παραμέτρους τοῦ Stokes μέ τή βοήθεια τῶν δύο συνιστωσῶν: τῆς πολωμένης S_p (polarized)καί τῆς ἀπόλωτης S_u(unpolarized). Ἔτσι θά ἔχουμε :

$$\begin{aligned} I &= S_u + S_p = S_u + S_{xp} + S_{yp} \\ Q &= S_{xp} - S_{yp} \\ U &= (S_{xp} - S_{yp}) \tan 2\tau \\ V &= (S_{xp} - S_{yp}) \tan 2\epsilon \ \sec 2\tau \end{aligned} \qquad (7\text{-}40)$$

Οἱ κανονικοποιημένες παράμετροι Stokes τοῦ μερικά πολωμένου κύματος εἶναι :

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{I}{S} = 1 \\ s_1 &= \frac{Q}{S} = \frac{S_x - S_y}{S} = \langle \cos 2\epsilon \ \cos 2\tau \rangle \\ s_2 &= \frac{U}{S} = \frac{2}{Z} \ \frac{\langle E_{xo} E_{yo} \cos\delta \rangle}{S} = \langle \cos 2\epsilon \ \sin 2\tau \rangle \\ s_3 &= \frac{V}{S} = \frac{2}{Z} \ \frac{\langle E_{xo} E_{yo} \sin\delta \rangle}{S} = \langle \sin 2\epsilon \rangle \end{aligned} \qquad (7\text{-}41)$$

Τό διάνυσμα Stokes καί τό κανονικοποιημένο διάνυσμα Stokes γιά τό μερικά πολωμένο κύμα εἶναι :

$$[S_i] = \begin{bmatrix} S \\ S\langle \cos 2\epsilon \cos 2\tau \rangle \\ S\langle \cos 2\epsilon \sin 2\tau \rangle \\ S\langle \sin 2\epsilon \rangle \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad [s_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ \langle \cos 2\epsilon \cos 2\tau \rangle \\ \langle \cos 2\epsilon \sin 2\tau \rangle \\ \langle \sin 2\epsilon \rangle \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}42)$$

Ἄν d ὁ βαθμός πόλωσης καί ϵ καί τ τά χαρακτηριστικά πόλωσης τῆς πολωμένης ἰσχύος μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν οἱ σχέσεις :

$$\left.\begin{aligned} \langle \cos 2\epsilon \cos 2\tau \rangle &= d \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ \langle \cos 2\epsilon \sin 2\tau \rangle &= d \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ \langle \sin 2\epsilon \rangle &= d \sin 2\epsilon \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}43)$$

῞Ωστε οἱ (7-42) γίνονται :

$$[S_i] = \begin{bmatrix} S \\ Sd \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ Sd \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ Sd \sin 2\epsilon \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad [s_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ d \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ d \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ d \sin 2\epsilon \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}44)$$

᾿Από τή σύγκριση τῶν (7-42) καί (7-44) π α ρ α τ η ρ ο ῦ μ ε πώς τή θέση τοῦ τελεστῆ τῆς μέσης τιμῆς τῶν (7-42) τήν παίρνει στίς (7-44) ὁ βαθμός πόλωσης d .

᾿Από τίς (7-44) μποροῦμε νά γράφουμε :

$$[S_i] = S \underbrace{\begin{bmatrix} 1-d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{τελείως ἀπόλωτο}} + S \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ d \cos 2\epsilon \cos 2 \\ d \cos 2\epsilon \sin 2 \\ d \sin 2\epsilon \end{bmatrix}}_{\text{τελείως πολωμένο}} \qquad (7\text{-}45)$$

καί

$$[s_i] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{τελείως ἀπόλωτο}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ d \cos 2\epsilon \cos 2\tau \\ d \cos 2\epsilon \sin 2\tau \\ d \sin 2\epsilon \end{bmatrix}}_{\text{τελείως πολωμένο}} \qquad (7\text{-}46)$$

Ὥστε, ἕνα μερικά πολωμένο κύμα μποροῦμε νά τό μεταχειριστοῦμε σάν ἄθροισμα ἑνός τελείως ἀπόλωτου κι ἑνός τελείως πολωμένου.

Ὁ βαθμός πόλωσης d (βλ. σχέση (7-38)) μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τίς κανονικοποιημένες παραμέτρους τοῦ Stokes, πού τίς παίρνουμε ἀπό τήν (7-44) :

$$d \triangleq \frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I} = \frac{S\sqrt{\left(\frac{Q}{S}\right)^2+\left(\frac{U}{S}\right)^2+\left(\frac{V}{S}\right)^2}}{S} = \sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2} \qquad (7\text{-}47)$$

Ἀπό ὅλα τά παραπάνω φτάνουμε στό συμπέρασμα ὅτι γιά νά ξ έρουμε τά χαρακτηριστικά ἑνός μερικά πολωμένου κύματος ἀρκεῖ νά δίνονται ὁ βαθμός πόλωσης του d, πού δείχνει ποιό κλάσμα τῆς ὁλικῆς ἰσχύος εἶναι πολωμένο καί τό σημεῖο (ε,τ) τῆς σφαίρας τοῦ Poincaré, πού περιγράφει τήν ὁλικά ~~πολωμένη~~ συνιστῶσα.

Ὥς ἐδῶ ὅλη ἡ περιγραφή ἔγινε μέ τίς γραμμικά πολωμένες συνιστῶσες. Μιά ἀνάλογη περιγραφή μέ τίς κυκλικά πολωμένες συνιστῶσες ἔδωσε ὁ Cohen (1958), πού ἔδειξε ὅτι γιά ὁλική πόλωση εἶναι :

$$A\Pi = \frac{E_L+E_R}{E_L-E_R} = \cot\varepsilon \qquad \text{καί} \qquad \delta' = 2\tau \qquad (7\text{-}48)$$

Οἱ παράμετροι τοῦ Stokes γιά ἕνα μερικά πολωμένο κύμα, στήν περιγραφή αὐτή, εἶναι:

$$\boxed{\begin{aligned} I &= S_L + S_R = S = \frac{\langle E_L^2\rangle}{Z} + \frac{\langle E_R^2\rangle}{Z} \\ Q &= \frac{2\langle E_L E_R \cos\delta'\rangle}{Z} \\ U &= \frac{2\langle E_L E_R \sin\delta'\rangle}{Z} \\ V &= S_L - S_R = \frac{\langle E_L^2\rangle}{Z} - \frac{\langle E_R^2\rangle}{Z} \end{aligned}} \qquad (7\text{-}49)$$

7.5. Παραστατική Μήτρα Πόλωσης μιᾶς Κεραίας — Ἀπόκριση Κεραίας σέ Μερικά ἤ Ὁλικά Πολωμένο Κύμα.

Πρῶτος ὁ Κο (1962) πρότεινε τήν περιγραφή τῶν χαρακτηριστικῶν πόλωσης μιᾶς κεραίας (εἴτε γιά λήψη εἴτε γιά ἐκπομπή) μέ τή βοήθεια μιᾶς μήτρας στήλης $[\alpha_i]$ ἀνάλογης μέ τή μήτρα-στήλη(διάνυσμα) τοῦ Stokes $[S_i]$. Ἄν A εἶναι τό ἐνεργό ἄνοιγμα μιᾶς κεραίας λήψης τότε τά χαρακτηριστικά πόλωσής της θά δίνονται ἀπό τή μήτρα :

$$A[\alpha_i] = A\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} \qquad (\text{σέ } m^2) \qquad (7\text{-}50)$$

ὅπου α_0 , α_1 , α_2 καί α_3 εἶναι οἱ κανονικοποιημένες παράμετροι τοῦ Stokes, πού θά ἀκτινοβολοῦσε ἡ κεραία σάν κεραία ἐκπομπῆς . Βάζοντας, λοιπόν, τό δείκτη t (transmitting), γιά νά δηλώσουμε τήν ἐκπομπή τοῦ κύματος, θά ἔχουμε :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_1 &= \cos 2\epsilon_t \cos 2\tau_t \\ \alpha_2 &= \cos 2\epsilon_t \sin 2\tau_t \\ \alpha_3 &= \sin 2\epsilon_t \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}51)$$

Ὁ Κο ἀπόδειξε ἰδιαίτερα ὅτι ἡ διαθέσιμη ἰσχύς N,ὅταν μέ τήν κεραία αὐτή ἐπιχειροῦμε τή λήψη ἑνός μερικά ἤ ὁλικά πολωμένου κύ-

ματος μέ χαρακτηριστικά πόλωσης $[S_i] = S[s_i]$, δίνεται από τή σχέση:

$$N = \frac{1}{2} SA \, [\widetilde{\alpha_i}] [s_i] = \frac{1}{2} SA \sum_{i=0}^{3} \alpha_i s_i \qquad (7\text{-}52)$$

όπου $[\widetilde{\alpha_i}]$ ή ανάστροφη (ή ανάμορφη) μήτρα τῆς $[\alpha_i]$ (transpose).

Έτσι λοιπόν :

$$N = \frac{1}{2} SA \left[\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\right] \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} SA(\alpha_0 s_0 + \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3) \qquad (7\text{-}53)$$

πού μπορεῖ νά διατυπωθεῖ καί σάν :

$$N = \frac{1}{2} SA\,(1 + d \cos \widehat{MM_\alpha}) = \frac{1}{2} SA\,(1-d) + dSA \cos^2 \frac{\widehat{MM_\alpha}}{2} \qquad (7\text{-}54)$$

όπου, όπως ξέρουμε, $\widehat{MM_\alpha}$ εἶναι ή γωνιακή απόσταση τῶν παραστατικῶν σημείων κύματος καί κεραίας πάνω στή σφαίρα τοῦ Poincaré .

Στήν ειδική περίπτωση τελείως πολωμένου κύματος $(d = 1)$ ή (7-54) ταυτίζεται μέ τήν (7-12)-μέ μόνη τή διαφορά ότι ή (7-12) αφορᾶ τήν τάση καί όχι τήν ισχύ (γι αὐτό τό λόγο υπάρχει τό τετράγωνο)- .

Από τήν (7-54) προκύπτουν τά εξῆς σημαντικά συμπεράσματα :

(α) Στήν κεραία παίρνουμε μόνο τό μισό τῆς απόλωτης ισχύος τοῦ κύματος καί μάλιστα ανεξάρτητα από τήν προσαρμογή κεραίας - κύματος .

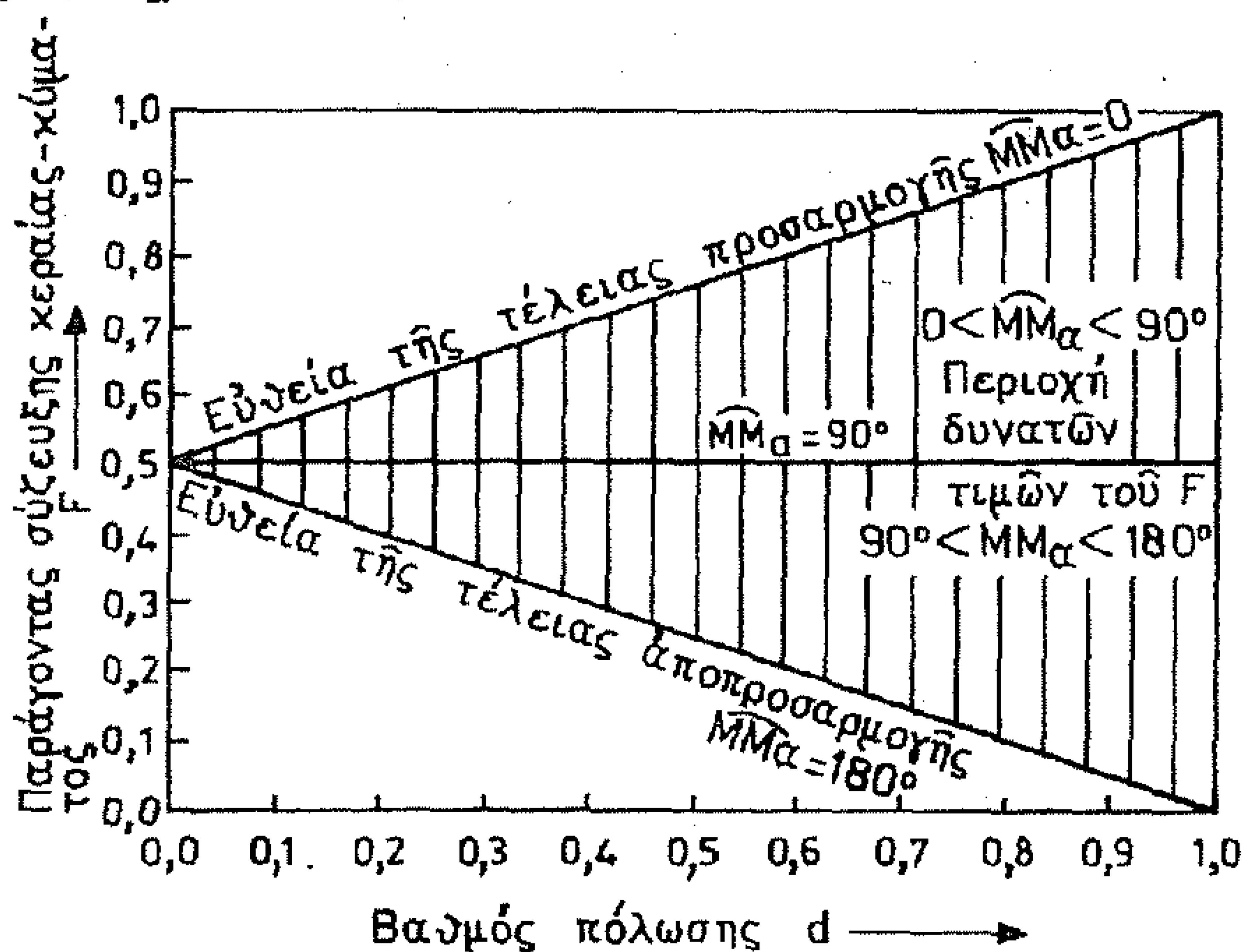
(β) Αντίθετα όλο τό πολωμένο μέρος τῆς ισχύος εἶναι διαθέσιμο γιά τήν κεραία ή λήψη του όμως επιτυγχάνεται μόνο στήν περίπτωση τέλειας προσαρμογῆς κεραίας-κύματος (δηλ. γιά $\widehat{MM_\alpha}=0$)

(γ) Γιά τή γενικότερη διερεύνηση τῆς προσαρμογῆς κεραίας- κύματος ἡ (7-54) γράφεται καί :

$$P = \left(\frac{1-d}{2} + d \cos^2 \frac{\widehat{MM_\alpha}}{2} \right) AS = FAS \qquad (7\text{-}55)$$

ὅπου F εἶναι ὁ παράγοντας, πού βρίσκεται μέσα στήν παρένθεση. Ὁ F μπορεῖ νά ὀνομαστεῖ π α ρ ά γ ο ν τ α ς σ ύ ζ ε υ ξ η ς κ ε ρ α ί α ς - κ ύ μ α τ ο ς. Ὁ παράγοντας F ἐκφράζει πόσο κλάσμα τῆς μέγιστης διαθέσιμης ἰσχύος AS λαβαίνει ἡ κεραία.

Ἡ γραφική παράσταση τοῦ παράγοντα σύζευξης κεραίας- κύματος (F), σέ συνάρτηση μέ τό βαθμό πόλωσης (d) εἶναι μιά εὐθεία γραμμή, γιά κάθε τιμή τῆς γωνιακῆς ἀπόστασης $\widehat{MM}\alpha$ τῶν καταστάσεων πόλωσης κεραίας - κύματος (βλ. σχ. 7-7). Ὅλες αὐτές οἱ εὐθεῖες γραμμές περιέχονται μέσα στό τρίγωνο πού σχηματίζουν ἡ εὐθεία της τέλειας προσαρμογῆς ($\widehat{MM}_\alpha = 0^o$) καί ἡ εὐθεία τῆς τέλειας ἀποπροσαρμογῆς ($\widehat{MM}_\alpha = 180^o$) .



Σχ. 7-7. Γραφική παράσταση τῆς σχέσης F=F(d), γιά $\widehat{MM}_\alpha$=σταθ. ἡ F(d) εἶναι εὐθεία γραμμή.

76. Γενίκευση τῆς Περιγραφῆς μέ Μῆτρες.

Ἄν ἀπό τά S_i ορίσουμε τέσσερις ἄλλες παραμέτρους S_{ij} ὡς ἑξῆς :

$$\left.\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{2}(s_0+s_1) \\ s_{12} &= \frac{1}{2}(s_2+js_3) \\ s_{21} &= \frac{1}{2}(s_2-js_3) \\ s_{22} &= \frac{1}{2}(s_0-s_1) \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}56)$$

καί, ἀνάλογα, ἄλλες τέσσερις παραμέτρους α_{11} , α_{12}, α_{21} καί α_{22} γιά τήν κεραία καί χρησιμοποιήσουμε τίς νέες παραμέτρους σάν στοιχεῖα μητρῶν 2x2 , μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ διαθέσιμη ἰσχύς στήν κεραία, στή γενική περίπτωση πόλωσης, δίνεται ἀπό τήν σχέση :

$$N = T_r\left\{SA\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{bmatrix}\right\} \qquad (7\text{-}57)$$

ὅπου μέ T_r δηλώνουμε τό ἴχνος (trace) τῆς μήτρας δηλ.τό ἄθροισμα τῶν διαγώνιων ὅρων της. Ἡ (7-57) γράφεται καί :

$$N = AS(\alpha_{11}s_{11}+\alpha_{22}s_{22}+\alpha_{33}s_{33})$$

ἤ

$$\boxed{N = AS\,T_r\left\{\left[\alpha_{ij}\right]\left[s_{ij}\right]\right\} = ASF} \qquad (7\text{-}58)$$

Σύμφωνα μέ τή σχέση αὐτή ἡ ἀπόκριση N τοῦ συστήματος δίνεται ἀπό τό ἴχνος τῆς μήτρας πού προκύπτει ὡς γινόμενο τῆς μήτρας $A[\alpha_{ij}]$ τοῦ συστήματος λήψης (κεραία καί δέκτης) ἐπί τή μή-

τρα $S[s_{ij}]$ τοῦ κύματος. Ἡ σχέση αὐτή ἔχει γενικότερη ἰσχύ σέ ὅλη τήν ὀπτική, ὅπου οἱ μῆτρες τῆς (7-58) λέγονται μ ῆ τ ρ ε ς σ υ ν ε κ τ ι κ ό τ η τ α ς (coherency matrices).

Στόν Πίνακα πού ἀκολουθεῖ δίνονται οἱ κανονικοποιημένες παράμετροι Stokes καί οἱ ἀντίστοιχες μῆτρες συνεκτικότητας γιά μερικές εἰδικές περιπτώσεις κυμάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7-ΙΙ

Τύπος Κύματος	Κανονικοποιημένο Διάνυσμα Stokes	Μήτρα Συνεκτικότητας
Τελείως ἀπόλωτο	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
Δεξιόστροφο κυκλικό	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -j\\j & 1\end{bmatrix}$
Ἀριστερόστροφο κυκλικό	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & j\\-j & 1\end{bmatrix}$
Γραμμικά πολωμένο μέ γωνία πόλωσης α (τ=α)	$\begin{bmatrix}1\\\cos 2\alpha\\\sin 2\alpha\\0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\\sin 2\alpha & 1-\cos 2\alpha\end{bmatrix}$
Μερικά $\left(d=\frac{1}{3}\right)$ γραμμικά πολωμένο μέ $\tau=\alpha=45°$	$\begin{bmatrix}1\\0\\1/3\\0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1/3\\1/3 & 1\end{bmatrix}$

Ἡ μήτρα συνεκτικότητας ἑνός κύματος, πού προκύπτει σέ ἕνα σημεῖο ἀπό τήν ἐπαλληλία διάφορων ἀνεξάρτητων κυμάτων, πού διαδίδονται κατά τήν ἴδια διεύθυνση, θά εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν μητρῶν συνεκτικότητας τῶν ἐπιμέρους κυμάτων στό σημεῖο αὐτό.
Κι ἀντίστροφα, μποροῦμε νά ἀναλύσουμε ἕνα κύμα σέ ἐπιμέρους συνιστῶσες μέ κατάλληλες πολώσεις. Γιά ἕνα τελείως ἀπόλωτο κύμα μποροῦμε νά γράφουμε λόγου χάρη :

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (7\text{-}59)$$

πού σημαίνει πώς μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι προκύπτει ἀπό ἕνα γραμμικά πολωμένο κύμα μέ $\alpha=\tau=0^o$ κι ἕνα ἄλλο γραμμικά πολωμένο μέ $\alpha=\tau=90^o$. Ἔτσι τό τελείως ἀπόλωτο κύμα μπορεῖ νά προκύψει ὡς ἄθροισμα δύο ἀνεξάρτητων τελείως γραμμικά πολωμένων κυμάτων ($\epsilon=0$), πού ἔχουν τήν ἴδια ἔνταση καί μέ τά χαρακτηριστικά τους ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ τους, ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε .

Ἐντελῶς ἀντίστοιχα, τό ἀπόλωτο κύμα μπορεῖ νά γραφεῖ :

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & j\\ -j & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -j\\ j & 1\end{bmatrix} \qquad (7\text{-}60)$$

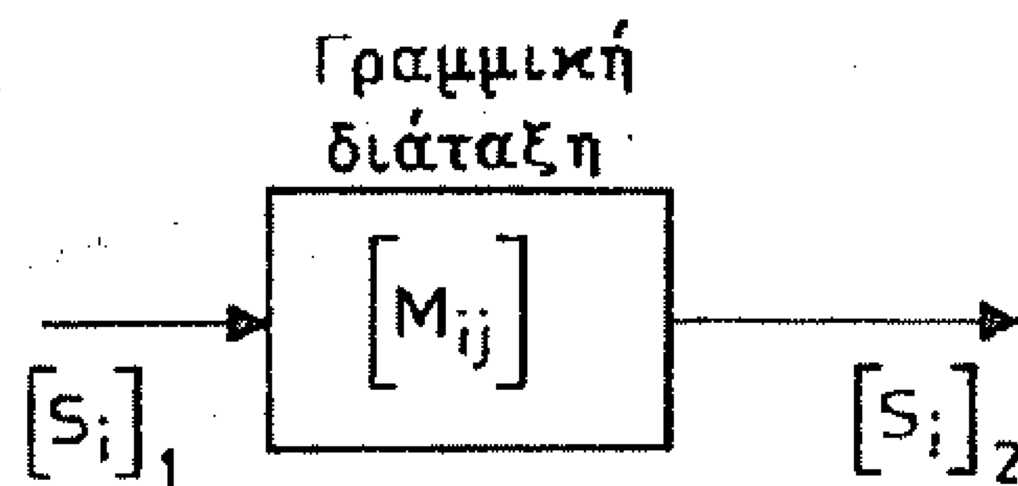
δηλαδή σάν ἄθροισμα δύο τελείως κυκλικά πολωμένων ἀνεξάρτητων κυμάτων, μέ ἀντίστροφη πολικότητα (L καί R) καί τήν ἴδια ἔνταση.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο θά μπορούσαμε νά ἐργαστοῦμε μέ τά διανύσματα τοῦ Stokes, π.χ. γιά τελείως ἀπόλωτο κύμα :

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (7\text{-}61)$$

7.7 Μετασχηματισμός τοῦ Διανύσματος Stokes Κύματος κατά τή Διέλευσή του μέσα ἀπό Γραμμική Διάταξη - Μῆτρες Mueller.

Ὅταν μιά ἠλεκτρομαγνητική δέσμη (π.χ μιά δέσμη μικροκυμάτων ἤ μιά δέσμη LASER) περάσει μέσα ἀπό μιά διάταξη (π.χ. μέσα ἀπό ἕναν ἐξασθενητή, ἕναν πολωτή, ἕναν γραμμικό ἐπιβραδυντή $\lambda/2$ κ.ἄ.) θά πάθει μεταβολές στήν ἔντασή της καί στήν κατάσταση τῆς πόλωσής της. Θά μετασχηματιστεῖ δηλαδή τό διάνυσμα Stokes πού τήν χαρακτηρίζει. Στήν περίπτωση πού ἡ διάταξη εἶναι γραμμική, οἱ παράμετροι Stokes τῆς εἰσερχόμενης δέσμης εἶναι γραμμικές συναρτήσεις τῶν παραμέτρων Stokes τῆς εἰσερχόμενης δέσμης. Ἔτσι, ἄν $[S_i]_1$ εἶναι τό διάνυσμα Stokes τῆς εἰσερχόμενης δέσμης καί $[S_i]_2$ τῆς ἐξερχόμενης (βλ. σχ. 7-8) εἶναι :



Σχ. 7-8. Ὁ Μετασχηματισμός τοῦ διανύσματος Stokes ἑνός κύματος, ὅταν περνᾶ μέσα ἀπό γραμμική διάταξη, ἐκφράζεται ἀπό τή μήτρα Mueller (μήτρα μεταφορᾶς) τῆς διάταξης .

$$[S_i]_2 = [M_{ij}]\,[S_i]_1 \tag{7-62}$$

ὅπου $[M_{ij}]$ εἶναι μιά μήτρα 4x4 πού λέγεται μ ή τ ρ α M u e l l e r τῆς διάταξης καί ἀντιπροσωπεύει τήν ἐπίδραση τῆς διάταξης κατά τή διαβίβαση.Π.χ. ἡ μήτρα Mueller ἑνός ἰδανικοῦ γραμμικοῦ πολωτη, μέ τό χαρακτηριστικό του ἐπίπεδο ὑπό γωνία $\theta=45^0$ ἀπό τόν ἄξονα x, εἶναι :

$$[M_{ij}]_p = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7-63}$$

Ἄν ἀπό τόν πολωτή αὐτόν περάσουμε μιά τελείως ἀπόλωτη ΗΜ δέσμη, μέ διάνυσμα Stokes :

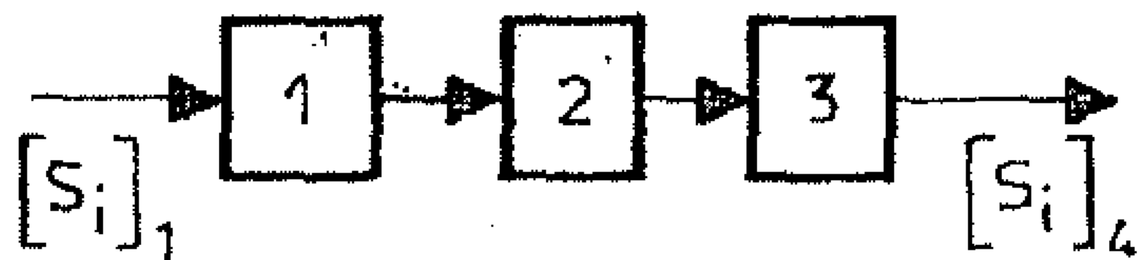
$$[S_i]_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

θά ἔχουμε στήν ἔξοδο δέσμη μέ διάνυσμα Stokes :

$$[S_i]_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{I}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}64)$$

Δηλαδή, γραμμικά πολωμένο μέ γωνία πόλωσης $\alpha = 45^o$.

Ἄν ἡ ΗΜ δέσμη περάσει διαδοχικά ἀπό ἕνα σύστημα γραμμικῶν διατάξεων (π.χ. ὅπως στό σχ. 7-9) τό σύστημα συμπεριφέρεται σάν μιά διάταξη μέ μήτρα Mueller ἴση μέ τό γινόμενο τῶν μητρῶν Mueller τῶν ἐπιμέρους διατάξεων. π.χ. γιά τό σύστημα τοῦ σχ. 7-9 εἶναι :



Σχ. 7-9 Ἐπίδραση γραμμικῶν διατάξεων σέ σειρά. Ἡ ὁλική μήτρα Mueller εἶναι τό γινόμενο τῶν ἐπιμέρους μητρῶν.

$$[S_i]_4 = [M_{ij}]_3 \, [M_{ij}]_2 \, [M_{ij}]_1 \, [S_i]_1 =$$

$$= [M_{ij}]_{321} \, [S_i]_1 \qquad (7\text{-}65)$$

Στόν πίνακα τῆς ἐπόμενης σελίδας δίνονται οἱ μῆτρες Mueller ὁρισμένων διατάξεων.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7-III

Πίνακας Μητρῶν Mueller Ὁρισμένων Γραμμικῶν Διατάξεων

ΤΥΠΟΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ	$\vartheta=0$	$\vartheta=\pm\pi/4$	$\vartheta=\pi/2$	$-\pi \leqslant \vartheta \leqslant +\pi$	
Ἰδανικός γραμμικός πολωτής ὑπό γωνία ϑ.	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&\pm1&0\\0&0&0&0\\\pm1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&C_2&S_2&0\\C_2&C_2^2&C_2S_2&0\\S_2&C_2S_2&S_2^2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$	$C_2 \equiv \cos 2\vartheta$ $S_2 \equiv \sin 2\vartheta$
Γραμμικός ἐπιβραδυντής λ/4 μέ τό γρήγορο ἄξονα ὑπό γωνία ϑ	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&\mp1\\0&0&1&0\\0&\pm1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&C_2^2&C_2S_2&-S_2\\0&C_2S_2&S_2^2&C_2\\0&S_2&-C_2&0\end{bmatrix}$	
Γραμμικός ἐπιβραδυντής λ/2 μέ τό γρήγορο ἄξονα ὑπό γωνία ϑ	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&C_4&S_4&0\\0&S_4&-C_4&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$	$C_4 \equiv \cos 4\vartheta$ $S_4 \equiv \sin 4\vartheta$
Γραμμικός ἐπιβραδυντής μέ ἐπιβράδυνση δ μέ τό γρήγορο ἄξονα ὑπό γωνία ϑ .	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\beta&\mu\\0&0&-\mu&\beta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\beta&0&\mp\mu\\0&0&1&0\\0&\pm\mu&0&\beta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\beta&-\mu\\0&0&\mu&\beta\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&C_2^2+S_2^2\beta&C_2S_2(1-\beta)&-S_2\mu\\0&C_2S_2(1-\beta)&S_2^2+C_2^2\beta&C_2\mu\\0&S_2\mu&-C_2\mu&\beta\end{bmatrix}$	$\beta \equiv \cos\delta$ $\mu \equiv \sin\delta$
Στροφέας τοῦ ἄξονα x σέ γωνία ϑ ὧς πρός τόν παλαιό ἄξονα x ἤ κυκλικός ἐπιβραδυντής πού ἐπιβραδύνει τήν δεξιόστροφη συνιστώσα κατά 2ϑ .	$R(\vartheta)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&C_2&S_2&0\\0&-S_2&C_2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$		Τή μήτρα R(ϑ) μποροῦμε νά τή χρησιμοποιήσουμε γιά νά μετασχηματίσουμε τή μήτρα Mueller ἑνός ὁποιουδήποτε πολωτικοῦ συστήματος μέ ἀρχικό προσανατολισμό φ στήν ἀντίστοιχη μήτρα τοῦ συστήματος γιά ἕνα νέο προσανατολισμό (φ+ϑ), μέ τή σχέση: $M(\varphi+\vartheta)=R(-\vartheta)\,M(\varphi)\,R(\vartheta)$		

Στόν πίνακα 7-ΙΙΙ προσθέτουμε καί τή μήτρα Mueller ἐνός " ἀπορροφητῆ " (absorber).

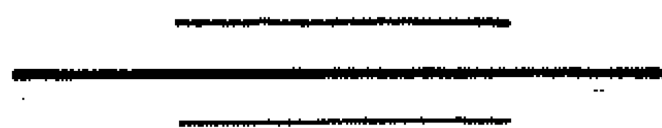
$$[M_{ij}] = e^{-2\bar{n}} \begin{bmatrix} \cosh 2\varepsilon & -\sinh 2\varepsilon & 0 & 0 \\ -\sinh 2\varepsilon & \cosh 2\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7\text{-}66)$$

ὅπου, ἄν n_x καί n_y οἱ συντελεστές ἐξασθένησης γιά τίς διευθύνσεις x καί y ἀντίστοιχα, εἶναι :

$$\bar{n} = \frac{n_x + n_y}{2} \qquad (7\text{-}67)$$

καί

$$\varepsilon = \frac{n_x - n_y}{2} \qquad (7\text{-}68)$$



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Λύση τῆς Διαφορικῆς Ἐξίσωσης τοῦ Κυκλικοῦ Κυλινδρικοῦ Κυματοδηγοῦ.

Γιά νά λύσουμε τή διαφορική ἐξίσωση (5-117) θά χρησιμοποιήσουμε τή μέθοδο τοῦ χωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν.

Θεωροῦμε, λοιπόν, ὅτι ἡ (5-117) :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k_c^2 U = 0 \qquad (1)$$

ἔχει λύση τῆς μορφῆς :

$$U = R(\rho)\,F(\varphi) \qquad (2)$$

Ὥστε ἡ (1) γράφεται:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{R\rho}\frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{F\rho^2}\frac{d^2F}{d\varphi^2} = -k_c^2 \qquad (3)$$

ἤ

$$\rho^2\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho} + k_c^2\rho^2 = -\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\varphi^2} \qquad (4)$$

Τό πρῶτο μέλος τῆς (4) εἶναι μόνο συνάρτηση τοῦ ρ , ἐνῶ τό δεύτερο εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ φ. Γιά νά ἰσχύει λοιπόν ἡ(5) , γιά ὅλα τά ρ καί φ, πρέπει κάθε μέλος της νά εἶναι σταθερό καί ἔστω ὅτι εἶναι ἴσο μέ k_φ^2 :

$$-\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\varphi^2} = k_\varphi^2 \qquad (5)$$

καί $$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k_c^2 - \frac{k_\varphi^2}{\rho^2}\right)R = 0 \qquad (6)$$

Ἡ (5) γράφεται:

$$\frac{d^2F}{d\varphi^2} + k_\varphi^2 F = 0 \qquad (7)$$

καί ἔχει γενική λύση

$$F = M\cos k_\varphi\varphi + N\sin k_\varphi\varphi \qquad (8)$$

Ἡ F πρέπει νά εἶναι συνεχής καί μονότιμη (θά πρέπει $F(\varphi+2n\pi) = F(\varphi)$). Τοῦτο συμβαίνει μόνο ἄν ἡ σταθερά k_φ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, δηλαδή ἄν :

$$k_\varphi = n \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (9)$$

καί : $$F = M\cos n\varphi + N\sin n\varphi \qquad (10)$$

Ἡ (6) γράφεται:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k_c^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R = 0 \qquad (11)$$

Κάνοντας τήν ἀντικατάσταση*)

$$\upsilon = k_c\rho \qquad (12)$$

---

*) Γιά νά κάνουμε τήν ἀντικατάσταση αὐτή πρέπει $k_c \neq 0$. Στήν περίπτωση πού $k_c=0$ καί $n=0$ εὔκολα ἀποδείχνεται ὅτι ἡ λύση τῆς (11) εἶναι : $R = A\ln\rho + B$ (α)
ἐνῶ στήν περίπτωση, πού $k_c=0$ καί $n\neq 0$ ἡ λύση τῆς (11) ἔχει τή γενική μορφή: $R = A_n\rho^n + B_n\rho^{-n}$ (β)

Ἐδῶ θεωροῦμε $k_c\neq 0$, γιατί στήν ἀντίθετη περίπτωση, πού ἰσχύουν δηλ. ἡ (α) καί ἡ (β), ἡ R στίς θέσεις $\rho=0$ (ἄξονας z) ἀπειρίζεται. Τά πεδία ὅμως (ἑπομένως καί ἡ R) πρέπει νά ἔχουν πεπερασμένη τιμή σ' ὅλο τό ἐσωτερικό τοῦ κυματοδηγοῦ.

γράφουμε τήν (11) ἔτσι :

$$\frac{d^2R}{d\upsilon^2} + \frac{1}{\upsilon}\frac{dR}{d\upsilon} + \left(1 - \frac{n^2}{\upsilon^2}\right)R = 0 \qquad (13)$$

Ἡ (13) εἶναι ἡ λεγόμενη δ ι α φ ο ρ ι κ ή ἐ ξ ί σ ω σ η τ ο ῦ B e s s e l , πού ἔχει δύο ἀνεξάρτητες λύσεις μέ τή μορφή σειρῶν :

$$J_n(k_c\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\left(\frac{k_c\rho}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!} \qquad (14)$$

καί

$$Y_n(k_c\rho) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma_e + \ln\frac{|k_c\rho|}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)}{m!}\left(\frac{2}{k_c\rho}\right)^{n-2m}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{k_c\rho}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m+n}\right) \qquad (15)$$

ὅπου

$$\gamma_e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772 \qquad (16)$$

ὁ λεγόμενος ἀ ρ ι θ μ ό ς τ ο ῦ E u l e r .

Ἡ $J_n(k_c\rho)$ λέγεται σ υ ν ά ρ τ η σ η B e s s e l π ρ ώ τ ο υ ε ἴ δ ο υ ς , ἐνῶ ἡ $Y_n(k_c\rho)$ σ υ ν ά ρ τ η σ η B e s s e l δ ε ύ τ ε ρ ο υ ε ἴ δ ο υ ς καί τίς βρίσκει συνήθως κανένας σέ πίνακες.

Γιά k_c = πραγματικό, οἱ συναρτήσεις αὐτές ἐμφανίζουν ταλάντωση (βλ. σχῆμα 1)

Ἄν

$$k_c\rho >> 1, n \qquad (17)$$

ἔχουμε :

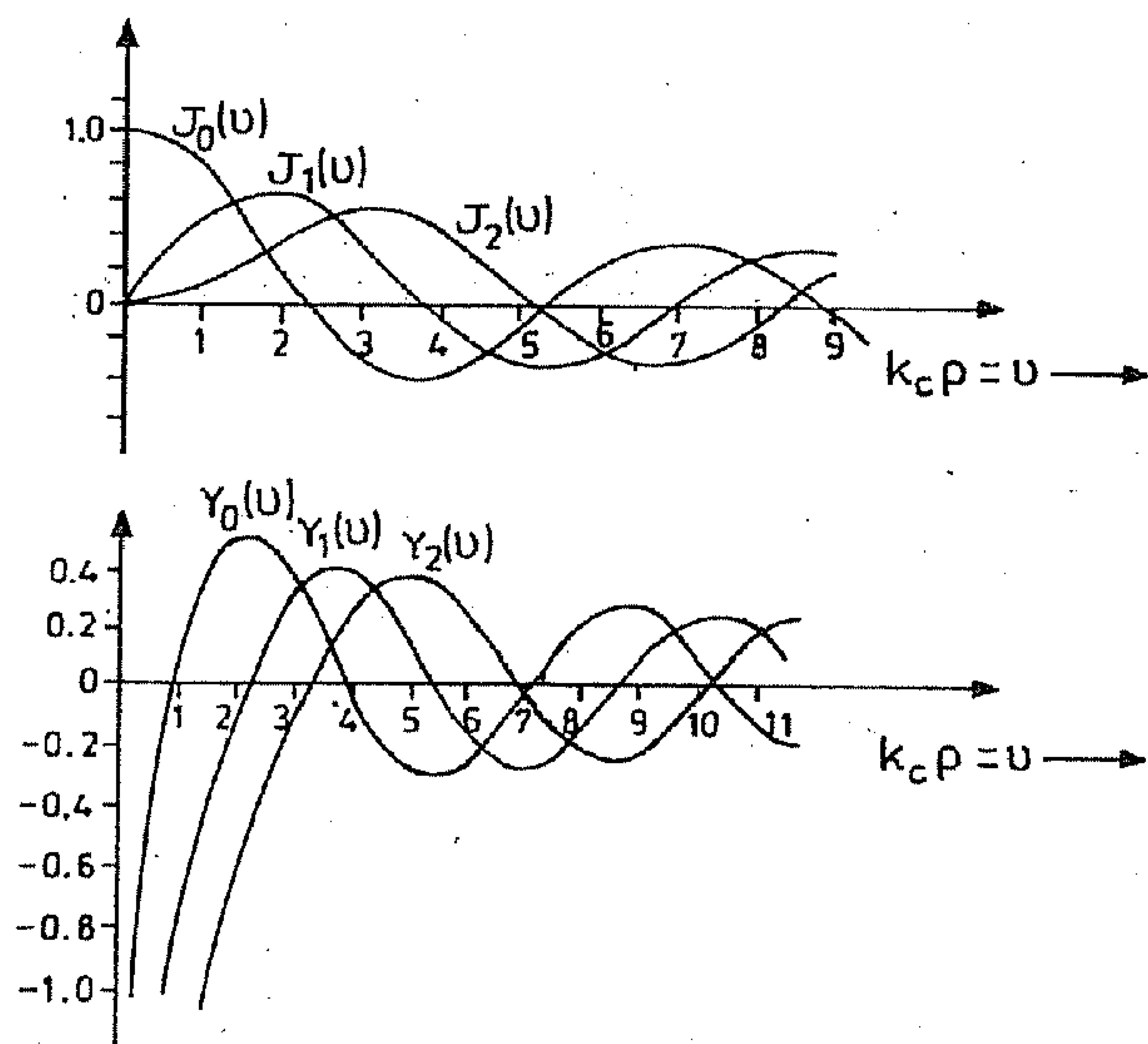
$$J_n(k_c\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_c\rho}} \cos\left(k_c\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (18)$$

$$Y_n(k_c\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_c\rho}} \sin\left(k_c\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (19)$$

Γιά τό λόγο αὐτό προσφέρεται ἡ εἰσαγωγή τῶν συναρτήσεων :

$$H_n^{(1)}(k_c\rho) = J_n(k_c\rho) + jY_n(k_c\rho) \qquad (20)$$

$$H_n^{(2)}(k_c\rho) = J_n(k_c\rho) + jY_n(k_c\rho) \qquad (21)$$



Σχ. 1 Οἱ συναρτήσεις τοῦ Bessel πρώτου καί δεύτερου εἴδους.

Οἱ συναρτήσεις $H_n^{(1)}(k_c\rho)$ καί $H_n^{(2)}(k_c\rho)$ εἶναι λύσεις τῆς ἐξίσωσης Bessel καί λέγονται συναρτήσεις Bessel τρίτου εἴδους ἤ συναρτήσεις Hankel.

"Οταν

$$k_c \rho >> 1, n \tag{22}$$

εἶναι:

$$H_n^{(1)} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_c \rho}}\, e^{j\left(k_c \rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{23}$$

$$H_n^{(2)} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k_c \rho}}\, e^{-j\left(k_c \rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{24}$$

Οἱ (23) καί (24) ἄν πολλαπλασιαστοῦν ἐπί $e^{j\omega t}$, παριστάνουν, ἀντίστοιχα, εἰσερχόμενα καί ἐξερχόμενα κυλινδρικά ἁρμονικά κύματα.

"Αν εἶναι :

$$k_c \rho << 1 \tag{25}$$

τότε

$$J_n(k_c \rho) \rightarrow \frac{\left(\frac{k_c \rho}{2}\right)^n}{n!} \tag{26}$$

καί

$$Y_n(k_c \rho) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\gamma_e + l_n \frac{|k_c \rho|}{2}\right), & n = 0 \\ -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{k_c \rho}\right)^n, & n \neq 0 \end{cases} \tag{27}$$

Ἀνεξάρτητα ἀπό τήν τιμή τοῦ n οἱ συναρτήσεις $Y_n(u) = Y_n(k_c \rho)$ ἔχουν πόλο στή θέση $\rho = 0$, δηλ. πάνω στόν ἄξονα z . Γιά τό λόγο αὐτό πρέπει νά ἀποφεύγουμε νά τίς χρησιμοποιοῦμε σέ προβλήματα, πού στήν ὑπό μελέτη περιοχή περιλαβαίνεται καί ὁ ἄξονας z, ἐκτός ἄν στίς θέσεις $\rho = 0$ ὑπάρχει γραμμική πηγή πεδίου (π.χ. ἕνα λεπτό φορτισμένο σύρμα.

"Αν τό k_c εἶναι φανταστικό ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν οἱ (14), (15) . Μπορούμε τότε νά ὁρίσουμε δύο τροποποιημέ -

ν ε ς σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι ς B e s s e l , πού εἶναι πραγματικές, ὡς ἑξῆς :
Ὑποθέτουμε ὅτι

$$k_c = j\,t \quad (28)$$

καί ορίζουμε τίς

$$I_n(t\rho) = (j)^{-n} J_n(jt\rho) \quad (29)$$

$$K_n(t\rho) = \frac{\pi}{2}(j)^{n+1} H_n^{(1)}(jt\rho) \quad (30)$$

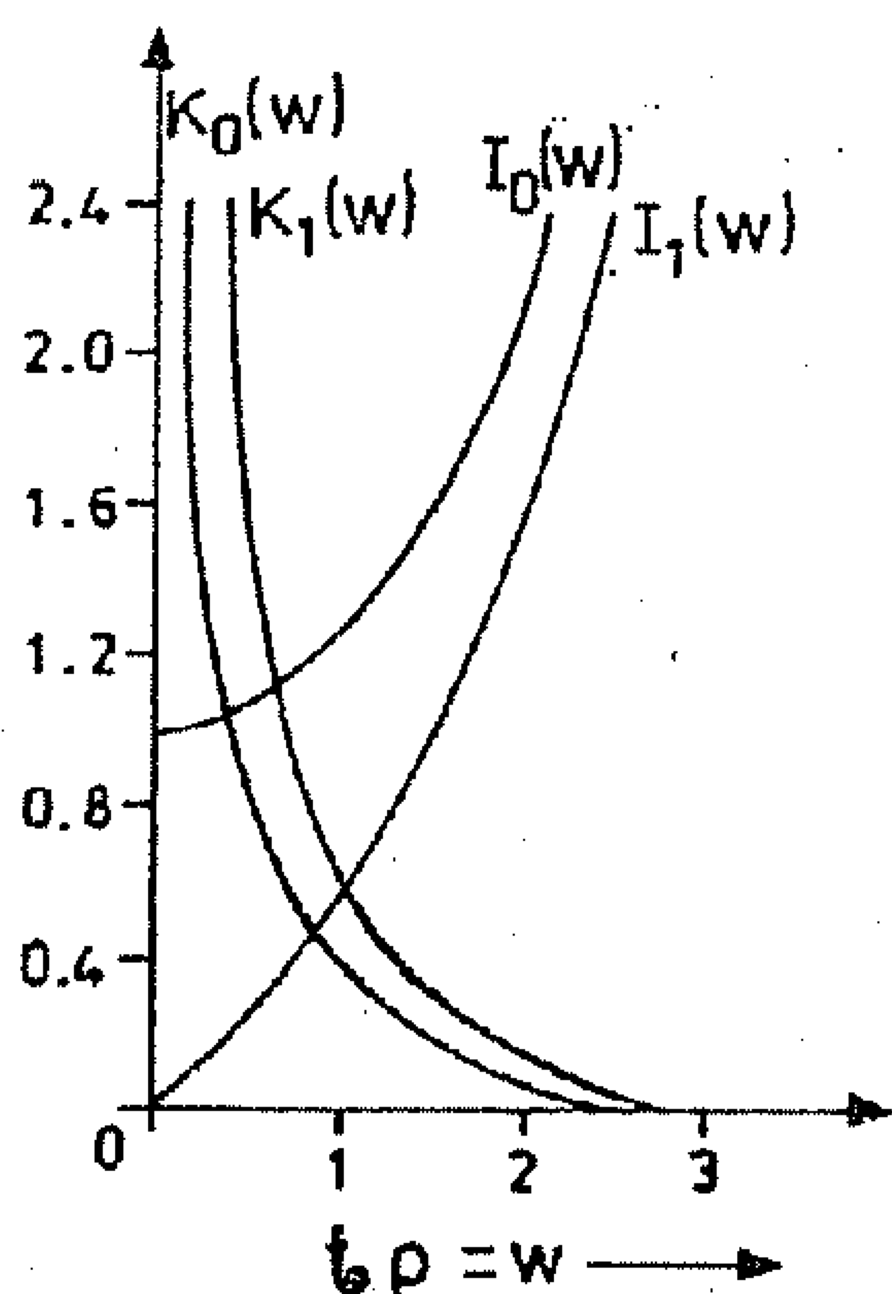
Οἱ $I_n(t\rho)$ καί $K_n(t\rho)$ ἀποτελοῦν ἕνα ἀνεξάρτητο σύνολο λύσεων τῆς ἐξίσωσης Bessel. Ὅταν

$$t\rho >> 1, n \quad (31)$$

τότε

$$I_n(t\rho) \rightarrow \frac{e^{t\rho}}{\sqrt{2\pi t\rho}} \quad (32)$$

$$K_n(t\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2t\rho}}\, e^{-t\rho} \quad (33)$$



Σχ. 2 Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel .

Στό σχ. 2 παριστάνονται μερικές ἀπό τίς πρῶτες τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel.

Στόν ἑπόμενο πίνακα I δίνουμε μερικές ἰδιότητες καί ὁρισμένους ἀναγωγικούς τύπους τῶν συναρτήσεων Bessel .

Ἡ λύση (2) τῆς (1) δίνεται ἀπό τό γινόμενο τῶν $R_n(\rho)$, $F_n(\varphi)$ γιά κάθε περίπτωση τοῦ k_c ὅπως δείχνει

ὁ πίνακας Ι πού ἀκολουθεῖ. Ἡ γενική λύση τῆς (1) προκύπτει σάν ἄθροισμα τῶν συναρτήσεων $U_n(\rho,\varphi)$ τοῦ πίνακα Ι .

$$U = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n \qquad (34)$$

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

$$J_{-n}(\upsilon) = (-1)^n J_n(\upsilon)$$

$$Y_n(\upsilon) = \lim_{\nu \to n} \frac{\cos\nu\pi\, J_\nu(\upsilon) - J_{-\nu}(\upsilon)}{\sin\nu\pi}$$

$$Y_{-n}(\upsilon) = (-1)^n Y_n(\upsilon)$$

$$I_{-n}(w) = I_n(w)$$

$$K_{-n}(w) = K_n(w)$$

$$n J_n(\upsilon) = \frac{\upsilon}{2}\left[J_{n-1}(\upsilon) + J_{n+1}(\upsilon)\right]$$

$$J_n'(\upsilon) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(\upsilon) - J_{n+1}(\upsilon)\right]$$

$$\cos(x \sin\vartheta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\vartheta$$

$$\cos(x\cos\vartheta) = J_0(x) - 2J_2(x)\cos 2\vartheta + 2J_4(x)\cos 4\vartheta - \dots$$

$$\sin(x \sin\vartheta) = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}\sin(2n-1)\vartheta$$

$$\sin(x\cos\vartheta) = 2\left[J_1(x)\cos\vartheta - J_3(x)\cos 3\vartheta + \dots\right]$$

$$\frac{d}{d\upsilon}\left[\upsilon^n J_n(\upsilon)\right] = \upsilon^n J_{n-1}(\upsilon)$$

$$\frac{d}{d\upsilon}\left[\upsilon^{-n} J_n(\upsilon)\right] = -\upsilon^{-n} J_{n+1}(\upsilon)$$

$$\int J_1(\upsilon)\,d\upsilon = -J_0(\upsilon)$$

$$\int \upsilon J_0(\upsilon)\,d\upsilon = \upsilon J_1(\upsilon)$$

$$\int J_0^2(\upsilon)\upsilon\,d\upsilon = \frac{\upsilon^2}{2}\left[J_0^2(\upsilon) + J_1^2(\upsilon)\right]$$

$$\int J_n^2(\upsilon)\upsilon\,d\upsilon = \frac{\upsilon^2}{2}\left[J_n^2(\upsilon) - J_{n-1}(\upsilon)J_{n+1}(\upsilon)\right]$$

ΠΙΝΑΚΑΣ II

Λ Υ Σ Η	$k_c = 0$		$k_c = $ πραγμ. $\neq 0$	$k_c = j\ell$
	$n = 0$	$n = \pm 1, \pm 2, \ldots$	$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$n = +0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
$R_n(\rho)$	$A \ln\rho + B$	$A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}$	$A_n J_n(k_c \rho) + B_n Y_n(k_c \rho)$	$A_n I_n(\ell\rho) + B_n K_n(\ell\rho)$
$F_n(\varphi)$	$M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi$			
$U_n(\rho,\varphi)$	Δέν ἐνδιαφέρει ἐδῶ		$(A_n J_n + B_n Y_n)(M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi)$	Δέν ἐνδιαφέρει ἐδῶ

Ἐπειδή οἱ συναρτήσεις Y_n καί K_n ἐμφανίζουν ἀσυνέχεια (ἀπειρίζονται) γιά $\rho = 0$ καί ἐπειδή στό πρόβλημά μας περιλαμβάνεται ὁ ἄξονας $z(\rho=0)$ στήν περιοχή πού μελετοῦμε, στίς λύσεις U_n τοῦ πίνακα I θεωροῦμε ὅτι:

$$B_n = 0 \tag{35}$$

Γιά κάθε n ἔχουμε λοιπόν καί μιά ἀνεξάρτητη λύση:

$$U_n = U_o J_n(k_c \rho)\left[\cos n\varphi + \sin n\varphi\right] \tag{36}$$

πού ἄν ἀγνοήσουμε τόν ἡμιτονικό προσθετέο γίνεται ἁπλούστερη :

$$U_n = U_o J_n(k_c \rho) \cos n\varphi \tag{37}$$

καί σημαίνει ὅτι ἡ U_n εἶναι μέγιστη στίς θέσεις $\varphi = 0$ καί $\varphi = \pi$ καί μηδέν στίς θέσεις $\pi/2$ καί $3\pi/2$. Ἄν ἀντί τοῦ ἡμιτονικοῦ ὅρου παραλείπαμε τόν συνημιτονικό, οἱ συνθῆκες τοῦ U_n θά περιστρέφονταν κατά 90^o . Ὑποθέτοντας ὅμως ὅτι ὁ ἐγκάρσιος προσανατολισμός τοῦ πεδίου εἶναι αὐθαίρετος μᾶς ἀρκεῖ ὁποιαδήποτε ἀπό τίς δύο λύσεις .

Σ η μ ε ί ω σ η

Στήν περίπτωση διαδόσεως κυκλικά πολωμένου Ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος μέσα ἀπό τόν κυματοδηγό πρέπει νά ληφθοῦν ὑπόψη καί οἱ δύο ὅροι.

Στόν ἑπόμενο πίνακα δίνονται οἱ τιμές τῶν πρώτων ριζῶν τῆς συνάρτησης Bessel α' εἴδους $J_n(\upsilon)$ καθώς καί τῆς πρώτης παραγώγου τῆς $J_n'(\upsilon)$.

ΠΙΝΑΚΑΣ III

ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΡΩΤΕΣ ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ BESSEL $J_n(\upsilon)$ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΤΗΣ $J_n'(\upsilon)$

Α/Α ΡΙΖΑΣ	$J_0(\upsilon)$	$J_1(\upsilon)$	$J_2(\upsilon)$	$J_3(\upsilon)$	$J_4(\upsilon)$	$J_5(\upsilon)$
1	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715
2	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386
3	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002
4	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801
5	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178
	$J_0'(\upsilon)$*	$J_1'(\upsilon)$	$J_2'(\upsilon)$	$J_3'(\upsilon)$		
1	3,8317	1,8412	3,0542	4,2012		
2	7,0156	5,3314	6,7061	8,0152		
3	10,1735	8,5363	9,9695	11,3459		

*) Παρατήρηση : Ὅπως προκύπτει καί ἀπό τίς τιμές τοῦ πίνακα εἶναι $J_0'(\upsilon)=-J_1(\upsilon)$. Δηλαδή οἱ $J_1(\upsilon)$ καί $J_0'(\upsilon)$ ἔχουν τίς ἴδιες ρίζες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Σημείωση Τά προβλήματα έχουν καταχωρηθεί κατά κεφάλαιο στίς ἀκόλουθες δύο κατηγορίες :

Α . Προβλήματα στά ὁποῖα δίνεται ἡ πλήρης λύση τους .

Β . Προβλήματα στά ὁποῖα δίνεται μόνο τό ἀποτέλεσμά τους .

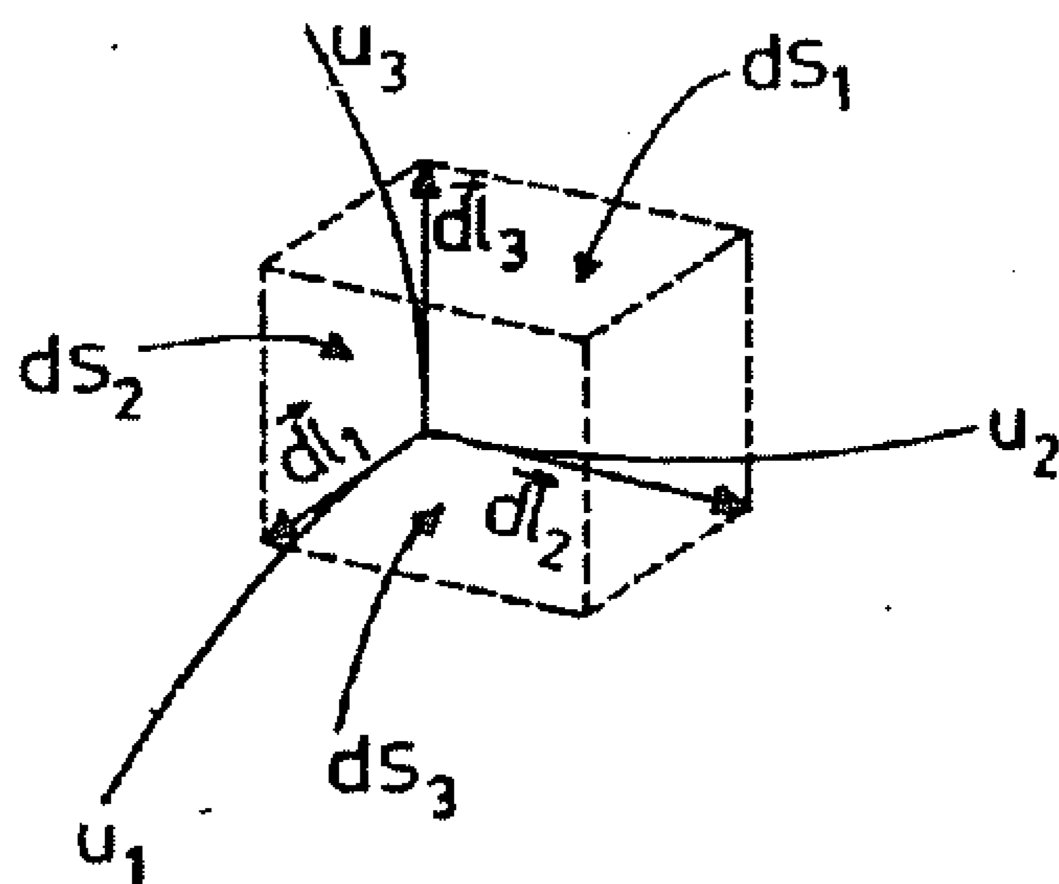
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Νά προσδιοριστοῦν οἱ ἐκφράσεις, πού δίνουν τό στοιχειῶδες ἐμβαδό, πάνω σέ κάθε συντεταγμένη ἐπιφάνεια, ἑνός ὀρθογώνιου καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων, μέ παράγοντες κλίμακας h_1 , h_2 , h_3 .

Λύση

Θεωροῦμε τό στοιχειῶδες ὀρθογώνιο τοῦ σχήματος σέ κάποια τυχαία θέση $\vec{r}$ τοῦ χώρου . Εἶναι :

$$\left.\begin{aligned} dl_1 &= h_1 du_1 \\ dl_2 &= h_2 du_2 \\ dl_3 &= h_3 du_3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$



᾽Από τίς σχέσεις (1) ἔχουμε :

$$\left.\begin{aligned} dS_1 &= dl_2\, dl_3 = h_2 h_3\, du_2\, du_3 \\ dS_2 &= dl_3\, dl_1 = h_3 h_1\, du_3\, du_1 \\ dS_3 &= dl_1\, dl_2 = h_1 h_2\, du_1\, du_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Οἱ (2) εἶναι οἱ ἐκφράσεις, πού ζητοῦνται .

1.2 Νά ἀποδείξετε ὅτι σ' ἕνα ὀρθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (u_1 , u_2, u_3) τά μοναδιαῖα διανύσματα $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$, $\hat{u}_3$, πού ἐφάπτονται στίς συντεταγμένες καμπύλες , στήν τυχαία θέση $\vec{r}$, μποροῦν νά προσδιοριστοῦν ἀπό τίς σχέσεις :

$$\hat{u}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \quad , \qquad i = 1 , 2 , 3$$

ὅπου h_i , i=1,2,3 οἱ παράγοντες κλίμακας τοῦ συστήματος .

Λ ύ σ η

Τά διανύσματα

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} &= \lim_{\Delta u_1 \to 0} \frac{\vec{r}(u_1+\Delta u_1, u_2, u_3) - \vec{r}(u_1, u_2, u_3)}{\Delta u_1} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} &= \ \ . \ . \ . \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} &= \ \ . \ . \ . \end{aligned} \qquad (1)$$

ἐφάπτονται, ἀντίστοιχα, στίς συντεταγμένες καμπύλες u_1 , u_2 , u_3 . Τά ἀντίστοιχα μοναδιαῖα διανύσματα $\hat{u}_i$ θά εἶναι:

$$\hat{u}_i = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right|} \quad , \qquad i = 1 , 2 , 3 \qquad (2)$$

'Αλλά εἶναι :

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right| = \frac{dl_i}{du_i} = h_i \qquad , \qquad i=1,2,3 \tag{3}$$

"Ωστε :

$$\boxed{\hat{u}_i = \frac{1}{h_i}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}} \tag{4}$$

1.3 Νά μετασχηματιστεῖ τό διάνυσμα $\vec{R}=\rho\hat{\rho} + z\hat{z}$ ἀπό τό κυλινδρικό σύστημα στό καρτεσιανό.

Λ ύ σ η

"Ας ποῦμε ὅτι τό διάνυσμα πού ζητοῦμε εἶναι τό

$$\vec{R} = R_x\hat{x} + R_y\hat{y} + R_z\hat{z} \tag{1}$$

Θά εἶναι :

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \vec{R}\cdot\hat{x} \\ R_y &= \vec{R}\cdot\hat{y} \\ R_z &= \vec{R}\cdot\hat{z} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Δηλαδή :

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \rho\,\hat{\rho}\cdot\hat{x} + z\ \hat{z}\cdot\hat{x} = \rho\cos\varphi + 0 = \rho\cos\varphi = x \\ R_y &= \rho\,\hat{\rho}\cdot\hat{y} + z\ \hat{z}\cdot\hat{y} = \rho\sin\varphi + 0 = \rho\sin\varphi = y \\ R_z &= \rho\,\hat{\rho}\cdot\hat{z} + z\ \hat{z}\cdot\hat{z} = \ 0 + z = z \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

'Από τίς (3) ἡ (1) γίνεται :

$$\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \equiv \vec{r} \tag{4}$$

"Ωστε τό διάνυσμα $\vec{R}=\rho\hat{\rho}+z\hat{z}=\rho\hat{\rho}+0\hat{\varphi}+z\hat{z}$,πού παριστάνει ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου φ = σταθ. , ταυτίζεται μέ τό διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ τοῦ καρτεσιανοῦ συστήματος.

1.4 Νά ὑπολογιστοῦν οἱ παράγωγοι τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων τοῦ κυλινδρικοῦ συστήματος συντεταγμένων ὡς πρός ρ , φ καί z , ἀφοῦ πρῶτα ὁριστοῦν τά διανύσματα αὐτά.

Λ ύ σ η

Θεωροῦμε τό διάνυσμα θέσης: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ (1)

καί τίς σχέσεις μετασχηματισμοῦ

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ἔχουμε (βλ. σχέση (4) τοῦ προβλ. 1.2) :

$$\hat{\rho} = \frac{\partial\vec{r}/\partial\rho}{|\partial\vec{r}/\partial\rho|} = \frac{\hat{x}\frac{\partial x}{\partial\rho} + \hat{y}\frac{\partial y}{\partial\rho} + \hat{z}\frac{\partial z}{\partial\rho}}{|\partial\vec{r}/\partial\rho|} = \frac{\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\partial\vec{r}/\partial\varphi}{|\partial\vec{r}/\partial\varphi|} = \frac{\hat{x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \hat{y}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \hat{z}\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{|\partial\vec{r}/\partial\varphi|} = \frac{-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi}{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

$$\hat{z} = \frac{\partial\vec{r}/\partial z}{|\partial\vec{r}/\partial z|} = \frac{0 + 0 + \hat{z}}{1} = \hat{z}$$

Ὥστε:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi \\ \hat{z} &= \hat{z} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Ἀπό τίς (3) προκύπτουν οἱ παράγωγοι :

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\rho}=0 \quad , \quad \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\rho}=0 \quad , \quad \frac{\partial\hat{z}}{\partial\rho}=0$$

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\varphi}=-\hat{x}\sin\varphi+\hat{y}\cos\varphi=\hat{\varphi} \quad , \quad \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}=-\hat{x}\cos\varphi-\hat{y}\sin\varphi=-\hat{\rho} \quad , \quad \frac{\partial\hat{z}}{\partial\varphi}=0$$

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial z}=0 \quad , \quad \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial z}=0 \quad , \quad \frac{\partial\hat{z}}{\partial z}=0$$

1.5 Μιά καμπύλη C δίνεται στό χῶρο ἀπό τίς παραμετρικές τηςἐξισώσεις $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$, ὅπου l τό μῆκος πάνω στήν καμπύλη C. Ἄν $\vec{r}$ εἶναι τό διάνυσμα θέσης ὁποιουδήποτε σημείου τῆς C, νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό διάνυσμα $d\vec{r}/dl$ εἶναιμοναδιαῖο ἐφαπτόμενο διάνυσμα τῆς καμπύλης C .

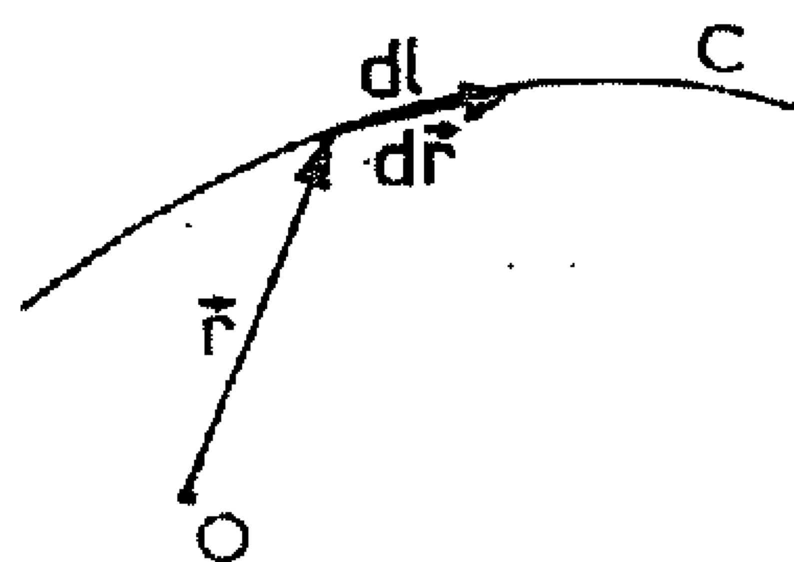
Λ ύ σ η

Τό διάνυσμα
$$\frac{d\vec{r}}{dl}=\frac{d(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})}{dl}=\frac{dx}{dl}\hat{x}+\frac{dy}{dl}\hat{y}+\frac{dz}{dl}\hat{z}$$

ἐφάπτεται στήν καμπύλη C στή θέση $\vec{r}$, ἀφοῦ ἔχει τή διεύθυνση τοῦ $d\vec{r}$ ·

Ἐξάλλου

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dl}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2+\left(\frac{dz}{dl}\right)^2}=\sqrt{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dl^2}}$$



καί ἀφοῦ

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

Προκύπτει ὅτι:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dl}\right|=1$$

Ὥστε τό διάνυσμα $d\vec{r}/dl$ εἶναι μοναδιαῖο καί ἐφάπτεται στήν καμπύλη C .

1.6 Ἔστω ὅτι ἡ κίνηση ἑνός ὑλικοῦ σημείου περιγράφεται ἀπό τήν ἐξίσωση

$$\vec{r} = r\cos\omega t\cdot\hat{x} + r\sin\omega t\cdot\hat{y} \qquad (1)$$

ὅπου r = σταθ. καί ω = σταθ.

α) Νά προσδιοριστεῖ ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ σημείου καί ν'ἀποδειχτεῖ ὅτι εἶναι κάθετη στό διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.

β) Νά προσδιοριστεῖ ἡ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ τοῦ σημείου καί νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση μέ τό $\vec{r}$ ἀλλά ἀντίθετη φορά, δηλαδή κατευθύνεται πρός τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων .

γ) Ν' ἀποδειχτεῖ ὅτι $\vec{r}\times\vec{\upsilon}$ = σταθ.

Λ ύ σ η

α)
$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -r\omega\,\sin\omega t\cdot\hat{x} + r\omega\,\cos\omega t\cdot\hat{y} \qquad (2)$$

$$\upsilon = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2\omega t + r^2\omega^2\cos^2\omega t} = \omega\cdot r \qquad (3)$$

$$\vec{r}\cdot\vec{\upsilon} = (r\cos\omega t\cdot\hat{x} + r\sin\omega t\cdot\hat{y})\cdot(-r\omega\sin\omega t\cdot\hat{x} + r\omega\cos\omega t\cdot\hat{y}) =$$

$$= -r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t + r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t = 0$$

Ὥστε :
$$\vec{r}\cdot\vec{\upsilon} = 0 \qquad (4)$$

Ἡ ταχύτητα λοιπόν δίνεται ἀπό τή (2) ἔχει μέτρο σταθερό (υ=ωr) καί εἶναι κάθετη πάνω στό διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.

β)
$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t\cdot\hat{x} - r\omega^2\sin\omega t\cdot\hat{y} = -\omega^2(r\cos\omega t\cdot\hat{x} + r\sin\omega t\cdot\hat{y})$$

ἤ
$$\vec{\gamma} = -\omega^2\vec{r}$$

$$\gamma)\ \vec{r}\times\vec{\upsilon}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ r\cos\omega t & r\sin\omega t & 0\\ -r\omega\sin\omega t & r\omega\cos\omega t & 0\end{vmatrix}=\hat{z}(r^2\omega\cos^2\omega t+r^2\omega\sin^2\omega t)=r^2\omega\hat{z}=\sigma\tau\alpha\vartheta.$$

<u>Παρατήρηση</u> 'Η κίνηση εἶναι ὁμαλή κυκλική κίνηση ὑλικοῦ σημείου . Ἄν m ἡ μάζα τοῦ ὑλικοῦ σημείου, τό διάνυσμα

$$\vec{G}=\vec{r}\times m\vec{\upsilon}=m\,\vec{r}\times\vec{\upsilon}=m\,\omega\,r^2\hat{z}$$

εἶναι τό γνωστό διάνυσμα τῆς στροφορμῆς τοῦ ὑλικοῦ σημείου .

1.7 Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἕλκεται ἀπό μιά δύναμη, πού προέρχεται ἀπό ὁρισμένο σημεῖο O (κεντρική δύναμη). Ἄς θεωρήσουμε τό O σάν ἀρχή τῶν ἀξόνων. Ἄν ἡ δύναμη εἶναι

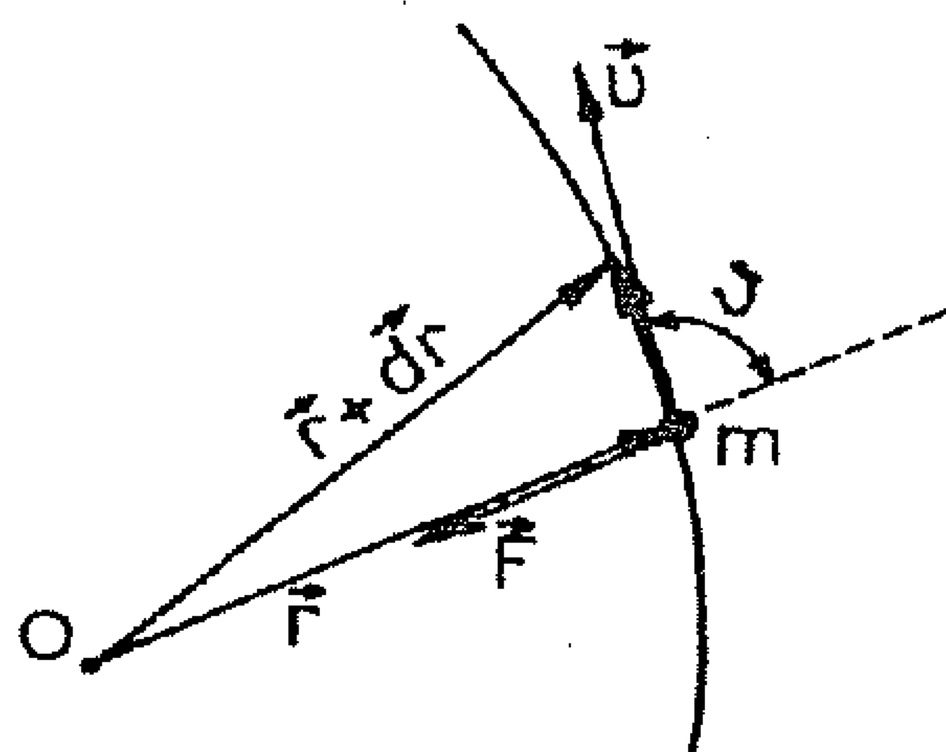
$$\vec{F}=f(r)\,\vec{r} \qquad (1)$$

ὅπου $\vec{r}$ τό διάνυσμα θέσης τοῦ σημείου, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ στροφορμή $\vec{G}$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου ὡς πρός τό O εἶναι σταθερό διάνυσμα καί νά προσδιορίσετε τή διεύθυνση καί τή φορά τοῦ διανύσματος αὐτοῦ. Ἄν m ἡ μάζα τοῦ ὑλικοῦ σημείου τί ἐκφράζει τό διάνυσμα $\vec{H}=\dfrac{1}{2m}\vec{G}$;

Λ ύ σ η

'Από τόν θεμελιώδη νόμο τῆς μηχανικῆς εἶναι :

$$\vec{F}=m\,\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d\vec{J}}{dt} \qquad (2)$$



ὅπου $\vec{J}=m\vec{\upsilon}$ ἡ ὁρμή τοῦ ὑλικοῦ σημείου. 'Η στροφορμή τοῦ ὑλικοῦ σημείου εἶναι :

$$\vec{G}=\vec{r}\times\vec{J}=\vec{r}\times m\vec{\upsilon} \qquad (3)$$

'Από τήν (3) έχουμε :

$$\frac{d\vec{G}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{J}+\vec{r}\times\frac{d\vec{J}}{dt}=\vec{\upsilon}\times m\vec{\upsilon}+\vec{r}\times\vec{F}=m\vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon}+f(r)\vec{r}\times\vec{r} \quad (4)$$

'Αλλά $$\vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon}=0 \quad , \quad \vec{r}\times\vec{r}=0 \quad (5)$$

"Ωστε : $$\frac{d\vec{G}}{dt}=0 \quad (6)$$

ή $$\boxed{\vec{G}=\sigma\tau\alpha\vartheta.} \quad (7)$$

'Από τήν (3) προκύπτει ότι ή $\vec{G}$ είναι κάθετη στό επίπεδο τής τροχιάς (τών $\vec{r}$ καί $\vec{\upsilon}$) κι έχει τή φορά τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου $\vec{r}\times\vec{\upsilon}$

'Από τήν (3) έχουμε ακόμα : $$\vec{H}=\frac{1}{2m}\vec{G}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{\upsilon}=\sigma\tau\alpha\vartheta. \quad (8)$$

Τό διάνυσμα $\vec{H}$ έχει τή διεύθυνση καί φορά τής στροφορμής $\vec{G}$ καί μέτρο

$$H=\frac{1}{2}r\frac{dl}{dt}\cdot\sin\vartheta \quad (9)$$

'Αλλά

$$\frac{1}{2}r\,dl\,\sin\vartheta=dS \quad (10)$$

όπου dS τό εμβαδό πού διαγράφει τό διάνυσμα $\vec{r}$ μέσα στό χρόνο dt.

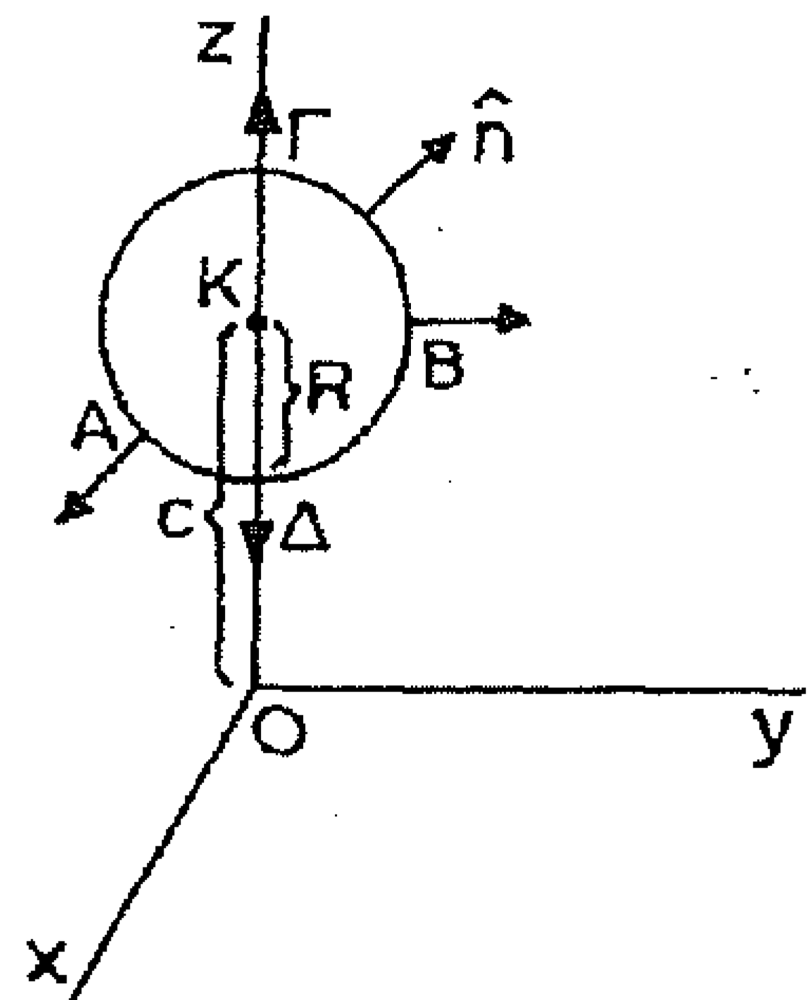
"Ωστε : $$H=\frac{dS}{dt} \quad (11)$$

Τό διάνυσμα $\vec{H}$ λοιπόν εκφράζει τήν "εμβαδική ταχύτητα" τοῦ ὑλικοῦ σημείου. Καί επειδή (βλ. σχέση (8)) $\vec{H}$ = σταθ. βγαίνει τό συμπέρασμα ότι ή εμβαδική ταχύτητα τοῦ σημείου είναι σταθερή, δηλ. τό διάνυσμα θέσης τοῦ ὑλικοῦ σημείου διαγράφει σέ ἴσους χρόνους ἴσα εμβαδά πάνω στό επίπεδο τής τροχιάς (Νόμος τών εμβαδών τοῦ Kepler) .

1.8 Νά προσδιοριστεῖ τό κάθετο μοναδιαῖο διάνυσμα $\hat{n}$ στό τυχαῖο σημεῖο (x,y,z) τῆς σφαίρας:

$$x^2+y^2+(z-c)^2=R^2 \tag{1}$$

Εἰδικά : Στά σημεῖα: α) (R,0,c) β) (0,R,c) γ) (0,0,c+R) καί δ) (0,0,c-R) .



Λ ύ σ η

Ἡ σφαίρα περιγράφεται ἀπό τήν ἐξίσωση :

$$\Phi(x,y,z) \equiv x^2+y^2+(z-c)^2=R^2=\sigma\tau\alpha\vartheta. \tag{2}$$

Στήν τυχαία θέση (x,y,z) τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας τό μοναδιαῖο διάνυσμα $\hat{n}$ μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή σχέση :

$$\hat{n}=\frac{\vec{\nabla}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} \tag{3}$$

Εἶναι :

$$\vec{\nabla}\Phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\Phi=2x\hat{x}+2y\hat{y}+2(z-c)\hat{z} \tag{4}$$

καί

$$\left|\vec{\nabla}\Phi\right|=\sqrt{4x^2+4y^2+4(z-c)^2}=2\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}=2R \tag{5}$$

Ἀπό τίς (3),(4) καί (5) ἔχουμε:

$$\boxed{\hat{n}=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+(z-c)\hat{z}}{R}} \tag{6}$$

Εἰδικότερα :

α. Στό A(R,0,c) : $\hat{n}=\dfrac{R\hat{x}+0+0}{R}=\hat{x}$

β. Στό σημεῖο B(0,R,c) : $\hat{n} = \dfrac{0 + R\hat{y} + 0}{R} = \hat{y}$

γ. Στό σημεῖο Γ(0,c+R) : $\hat{n} = \dfrac{0 + 0 + R\hat{z}}{R} = \hat{z}$

δ. Στό σημεῖο Δ(0,0,c−R): $\hat{n} = \dfrac{0 + 0 - R\hat{z}}{R} = -\hat{z}$

1.9 Ἡ σχετική θέση τοῦ σημείου $\vec{r}$ ὡς πρός τό σημεῖο $\vec{r}\,'$ δίνεται ἀπό τό διάνυσμα : $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' = R\hat{R}$ (1)

Χρησιμοποιώντας τούς τελεστές :

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}' = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x'} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y'} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z'} \tag{3}$$

νά ὑπολογίσετε τίς βαθμίδες : $\vec{\nabla}R$ καί $\vec{\nabla}'R$ ὅταν $R \neq 0$

Λ ύ σ η

Στό καρτεσιανό σύστημα εἶναι:

$$\vec{R} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z} \tag{4}$$

καί

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \tag{5}$$

Ἔχοντας ὑπόψη ὅτι $R \neq 0$ ὑπολογίζουμε :

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \dots = \frac{x - x'}{R} \qquad \frac{\partial R}{\partial x'} = \dots = -\frac{x - x'}{R}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \dots = \frac{y - y'}{R} \qquad \text{καί} \qquad \frac{\partial R}{\partial y'} = \dots = -\frac{y - y'}{R}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \dots = \frac{z - z'}{R} \qquad \frac{\partial R}{\partial z'} = \dots = -\frac{z - z'}{R}$$

'Οπότε

$$\vec{\nabla}R = \frac{x-x'}{R}\hat{x} + \frac{y-y'}{R}\hat{y} + \frac{z-z'}{R}\hat{z} = \frac{\vec{R}}{R} = \hat{R} \qquad (6)$$

καί

$$\vec{\nabla}'R = \frac{-\vec{R}}{R} = -\hat{R} \qquad (7)$$

1.10 Ἔστω μιά συνάρτηση f(R), ὅπου R τό μέτρο τοῦ διανύσματος τῆς προηγούμενης ἄσκησης. Ἄν ἡ f(R) εἶναι συνεχής καί παραγωγίσιμη ὡς πρός R, νά προσδιορίσετε τίς βαθμίδες $\vec{\nabla}f(R)$ καί $\vec{\nabla}'f(R)$. Εἰδικά ὅταν $f(R) \equiv 1/R$, $R \neq 0$.

Λύση

$$\vec{\nabla}f(R) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)f(R) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial z}\hat{z} = \frac{\partial f}{\partial R}\vec{\nabla}R \qquad (1)$$

Γιά $R \neq 0$ καί σύμφωνα μέ τά ἀποτελέσματα τῆς προηγούμενης ἄσκησης εἶναι :

$$\vec{\nabla}f(R) = \frac{\partial f}{\partial R}\vec{\nabla}R = \frac{\partial f}{\partial R}\frac{\vec{R}}{R} = \frac{\partial f}{\partial R}\hat{R} \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}'f(R) = \frac{\partial f}{\partial R}\vec{\nabla}'R = -\frac{\partial f}{\partial R}\frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\partial f}{\partial R}\hat{R} \qquad (3)$$

Ὥστε :

$$\vec{\nabla}f(R) = -\vec{\nabla}'f(R) = \frac{\partial f}{\partial R}\hat{R} \qquad (4)$$

Εἰδικά : $f(R) \equiv 1/R$, $R \neq 0$

τότε

$$\frac{\partial f}{\partial R} = -\frac{1}{R^2} \qquad (5)$$

καί

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\hat{R}}{R^2} = -\frac{\vec{R}}{R^3} \qquad (6)$$

1.11 Νά προσδιοριστοῦν οἱ προβολές τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων τοῦ καρτεσιανοῦ συστήματος $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ πάνω στίς συντεταγμένες καμπύλες τοῦ σφαιρικοῦ συστήματος.

Λύση

Εἶναι:

$$\hat{r} = \frac{\partial\vec{r}/\partial r}{|\partial\vec{r}/\partial r|} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\hat{x} + \frac{\partial y}{\partial r}\hat{y} + \frac{\partial z}{\partial r}\hat{z} \qquad (1)$$

'Ανάλογες σχέσεις ἰσχύουν καί γιά τά $\hat{\vartheta}, \hat{\varphi}$.

'Αλλά

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

"Ωστε :

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin\vartheta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\vartheta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\vartheta\,\hat{z} \\ \hat{\vartheta} &= \cos\vartheta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\vartheta\sin\varphi\,\hat{y} - \sin\vartheta\,\hat{z} \\ \hat{\varphi} &= -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y} \end{aligned} \qquad (3)$$

Οἱ προβολές τοῦ $\hat{x}$ πάνω στίς καμπύλες r, ϑ, φ εἶναι :

$$\hat{x}\cdot\hat{r} = \sin\vartheta\cos\varphi$$

$$\hat{x}\cdot\hat{\vartheta} = \cos\vartheta\cos\varphi$$

$$\hat{x}\cdot\hat{\varphi} = -\sin\varphi$$

Οἱ προβολές τῶν $\hat{y}$ καί $\hat{z}$ πάνω στίς καμπύλες r, ϑ, φ, εἶναι ἀντίστοιχα:

$$\hat{y}\cdot\hat{r} = \sin\vartheta\sin\varphi \qquad \hat{z}\cdot\hat{r} = \cos\vartheta$$

$$\hat{y}\cdot\hat{\vartheta} = \cos\vartheta\sin\varphi \qquad \hat{z}\cdot\hat{\vartheta} = -\sin\vartheta$$

$$\hat{y}\cdot\hat{\varphi} = \cos\varphi \qquad \hat{z}\cdot\hat{\varphi} = 0$$

1.12 Νά ὑπολογίσετε τά μεγέθη $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}$, $\vec{\nabla} u_1$, $\vec{\nabla} u_2$ καί $\vec{\nabla} u_3$

α) σέ καρτεσιανές β) σέ κυλινδρικές καί γ) σέ σφαιρικές συντεταγμένες.

Λύση

Σύμφωνα μέ τό πρόβλ. 1.2 εἶναι :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} = h_i \hat{u}_i \qquad i = 1,2,3 \tag{1}$$

ἐξάλ... εἶναι :

$$\vec{\nabla} u_1 = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \cdot \hat{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \hat{u}_3 \right) u_1 = \frac{\hat{u}_1}{h_1} \tag{2}$$

καί ἀνάλογα :

$$\vec{\nabla} u_2 = \frac{\hat{u}_2}{h_2} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} u_3 = \frac{\hat{u}_3}{h_3} \tag{4}$$

α) Καρτεσιανό (x,y,z): $h_1 = h_2 = h_3 = 1$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{\hat{x}}{1} = \hat{x} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{y} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{z}$$

$$\vec{\nabla} x = \hat{x} \quad , \quad \vec{\nabla} y = \hat{y} \quad , \quad \vec{\nabla} z = \hat{z}$$

β) Κυλινδρικό (ρ, φ, z): $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \hat{\rho} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \rho \hat{\varphi} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{z}$$

$$\vec{\nabla} \rho = \hat{\rho} \quad , \quad \vec{\nabla} \varphi = \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \quad , \quad \vec{\nabla} z = \hat{z}$$

γ) Σφαιρικό (r,ϑ,φ) : $h_1=1$, $h_2=r$, $h_3=r\sin\vartheta$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\hat{r} \quad , \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}=r\hat{\vartheta} \quad , \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=r\sin\vartheta\hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla}r=\hat{r} \quad , \quad \vec{\nabla}\vartheta=\frac{\hat{\vartheta}}{r} \quad , \quad \vec{\nabla}\varphi=\frac{\hat{\varphi}}{r\sin\vartheta}$$

1.13 "Αν $\vec{A}$ = σταθ. νά άποδειχτεῖ ὅτι : $\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{A})=\vec{A}$

Λ ύ σ η

Εἶναι :

$$\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z} \tag{1}$$

$$\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z} \tag{2}$$

καί

$$\vec{r}\cdot\vec{A}=xA_x+yA_y+zA_z \tag{3}$$

Γενικά εἶναι:

$$\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{A})=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)(xA_x+yA_y+zA_z)=$$

$$=\left(A_x+x\frac{\partial A_x}{\partial x}+y\frac{\partial A_y}{\partial x}+z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{x}+$$

$$+\left(x\frac{\partial A_x}{\partial y}+A_y+y\frac{\partial A_y}{\partial y}+z\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\hat{y}+$$

$$+\left(x\frac{\partial A_x}{\partial z}+y\frac{\partial A_y}{\partial z}+A_z+z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{z}$$

'Αλλά, ἀφοῦ τό $\vec{A}$ εἶναι σταθερό διάνυσμα ὅλες οἱ παράγωγοι τῶν προβολῶν του ὡς πρός x,y,z, εἶναι μηδέν .

Ώστε :
$$\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{A}) = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} = \vec{A}$$

1.14 Νά ύπολογιστεῖ τό μέγεθος $\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)$

Λύση

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^2} & \frac{y}{r^2} & \frac{z}{r^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^2}\right)\right] +$$

$$+ \hat{y}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^2}\right)\right] +$$

$$+ \hat{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right)\right] =$$

$$= \hat{x}\left[-\frac{2z}{r^3}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{2y}{r^3}\frac{\partial r}{\partial z}\right] + \hat{y}\left[-\frac{2x}{r^3}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{2z}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\right] +$$

$$+ \hat{z}\left[-\frac{2y}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{2x}{r^3}\frac{\partial r}{\partial y}\right] \qquad (1)$$

Ἀλλά
$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \qquad (2)$$

καί
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \qquad (3)$$

Ἀπό τίς (1) καί (3) προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^2}=\left(-\frac{2z}{r^3}\frac{y}{r}+\frac{2y}{r^3}\frac{z}{r}\right)\hat{x}+\left(-\frac{2x}{r^3}\frac{z}{r}+\frac{2z}{r^3}\frac{x}{r}\right)\hat{y}+$$

$$+\left(-\frac{2y}{r^3}\frac{x}{r}+\frac{2x}{r^3}\frac{y}{r}\right)\hat{z}=0\cdot\hat{x}+0\cdot\hat{y}+0\cdot\hat{z}=0$$

Ὥστε :

$$\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r^2}=0$$

1.15 Ἄν $\Phi(\vec{r})$ εἶναι μιά συνάρτηση συνεχής καί παραγωγίσιμη , νά ἀποδειχτεῖ ὅτι :

$$\text{rot}\,(\Phi\,\text{grad}\,\Phi)=0$$

(Ἡ ἀπόδειξη ἄς γίνει στό καρτεσιανό σύστημα)

Λύση

$$\text{rot}(\Phi\,\text{grad}\,\Phi)=\vec{\nabla}\times(\Phi\vec{\nabla}\Phi)=\vec{\nabla}\times\left(\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{x}+\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{y}+\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}&\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y}&\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\end{vmatrix}=\hat{x}\left(\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+$$

$$+\hat{y}\left(\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)+$$

$$+\hat{z}\left(\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$$

'Αλλά άφοῦ ἡ Φ εἶναι συνεχής , ἰσχύει :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

"Αρα :

$$\vec{\nabla}\times(\Phi\,\vec{\nabla}\,\Phi) = 0$$

1.16 "Αν $\vec{A} = \vec{A}(t)$, ὅπου t μιά παράμετρος, νά ὑπολογιστεῖ τό ὁλοκλήρωμα:

$$\int \vec{A}\times\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\,dt$$

Λ ύ σ η

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\frac{d\vec{A}}{dt}\right) = \vec{A}\times\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} + \frac{d\vec{A}}{dt}\times\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{A}\times\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$$

"Ωστε :

$$\int \vec{A}\times\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\,dt = \int\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\frac{d\vec{A}}{dt}\right)dt = \vec{A}\times\frac{d\vec{A}}{dt}$$

1.17 Νά ἀποδείξετε ὅτι :

$$\int_V \vec{\nabla}\,\Phi\,dV = \oint_S \Phi\,d\vec{S} \qquad (1)$$

ὅπου ἡ S εἶναι μιά κλειστή ἐπιφάνεια, πού περιορίζει τόν ὄγκο V καί $\Phi = \Phi(\vec{r})$ μιά φυσική συνάρτηση τῆς θέσης.

Λ ύ σ η

Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Gauss εἶναι :

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} \qquad (2)$$

ἔστω ἕνα διάνυσμα $\vec{B}$ = σταθ. καί ὅτι $\vec{A} = \Phi\vec{B}$. Τότε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot(\Phi\,\vec{B}) = \vec{\nabla}\Phi\cdot\vec{B} + \Phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\,\Phi \tag{3}$$

'Αλλά

$$(\Phi\,\vec{B})\cdot d\vec{S} = \vec{B}\cdot(\Phi\,d\vec{S}) \tag{4}$$

'Εφαρμόζοντας τή (2), τώρα, ἔχουμε :

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\;dV = \int_V \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\,\Phi\;dV = \oint_S \vec{B}\cdot\Phi\,d\vec{S} \tag{5}$$

ἤ

$$\vec{B}\cdot\left[\int_V \vec{\nabla}\Phi\;dV - \oint_S \Phi\;d\vec{S}\right] = 0 \tag{6}$$

'Αλλά τό $\vec{B}$ εἶναι σταθερό καί αὐθαίρετο. 'Επομένως γιά νά ἰσχύει ἡ (6) πρέπει :

$$\int_V \vec{\nabla}\,\Phi\;dV = \oint_S \Phi\;d\vec{S} \tag{7}$$

1.18 Νά προσδιορίσετε δύο μοναδιαῖα διανύσματα , πού νά εἶναι κάθετα στήν εὐθεία, πού ἑνώνει τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων μέ τό σημεῖο $(x_1, y_1, 0)$ καί νά βρίσκονται πάνω στό ἐπίπεδο xy.

('Απ. $\pm \dfrac{y_1\hat{x} - x_1\hat{y}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$)

1.19 Τό διάνυσμα, πού ἔχει ἀρχή τό σημεῖο ($\rho=2$, $\varphi=\pi$, $z=0$)καί τέλος τό σημεῖο ($\rho = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $z = 1$,νά ἐκφραστεῖ

α. στό ὀρθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

β. στό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (θυμηθεῖτε ὅτι τά $\hat{\rho}$ καί $\hat{\varphi}$ ἐξαρτῶνται ἀπό τό φ, ἀποφασίστε ποιά $\hat{\rho}$ καί $\hat{\varphi}$ θά χρησιμοποιήσετε καί συμβολίστε τά ἀνάλογα).

('Απ. α) $2\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z}$ β) $-2\hat{\rho}(\pi) - 3\hat{\varphi}(\pi) + \hat{z}$)

1.20 Νά μετασχηματιστεῖ τό διάνυσμα $\vec{A} = x\hat{x} + y\hat{y}$ σέ κυλινδρικές συντεταγμένες.

('Απ. $\vec{A} = \sqrt{x^2 + y^2}\,\hat{\rho}$,ὅπου $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\arctan \frac{y}{x})$)

1.21 Ἡ θέση ἑνός ὑλικοῦ σημείου σέ κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται σέ κάθε χρονική στιγμή t ἀπό τό διάνυσμα $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$ ὅπου $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ καί $z = z(t)$.

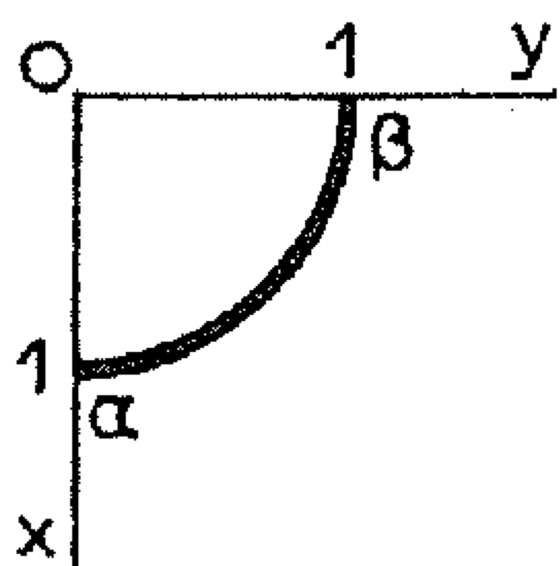
α. Νά προσδιορίσετε τήν ταχύτητα $\vec{v}(t)$ τοῦ σημείου .

β. Νά προσδιορίσετε τήν έπιτάχυνση $\vec{\gamma}(t)$ τοῦ σημείου.

('Απ. α) $\vec{\upsilon}=\hat{\rho}\,\frac{d\rho}{dt}+\rho\hat{\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}+\hat{z}\,\frac{dz}{dt}$

β) $\vec{\gamma}=\hat{\rho}\left[\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]+\hat{\varphi}\left[\rho\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\,\frac{d\rho}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\right]+\hat{z}\,\frac{d^2z}{dt^2}$)

1.22 Νά ύπολογιστεῖ τό όλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \vec{A}\cdot d\vec{l}$ ὅπου $\vec{A}=y\hat{x}-x\hat{y}$ μέ δρόμο όλοκλήρωσης τό τεταρτοκύκλιο πού δείχνει τό σχῆμα .



('Απ. $-\frac{\pi}{2}$)

1.23 Νά ύπολογίσετε τό όλοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta \hat{\rho}\,d\varphi$ μέ δρόμο όλοκλήρωσης τό τεταρτοκύκλιο $\widehat{\alpha\beta}$ τοῦ προηγούμενου προβλήματος.

('Απ. $\hat{x}+\hat{y}$)

1.24 Νά ύπολογίσετε τό έπικαμπύλιο όλοκλήρωμα :

$$\vec{Q}=\int_\alpha^\beta (\cos\varphi\,\hat{\rho}+\sin\varphi\,\hat{\varphi})\,d\varphi$$

μέ δρόμο όλοκλήρωσης τόν ἴδιο μέ τῶν δύο προηγούμενων προβλημάτων.

('Απ. $\vec{Q}=\hat{y}$)

1.25 Νά άποδείξετε ὅτι $\oint_S \cos\vartheta\,\hat{r}\cdot d\vec{S}=0$ ἄν S εἶναι όποιαδήποτε σφαίρα μέ κέντρο τήν άρχή τῶν άξόνων.

1.26 Νά ὑπολογιστεῖ τό ὁλοκλήρωμα $\vec{Q} = \int_V \hat{r}\sin\varphi dV$ ὅπου V ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας μέ κέντρο τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί μοναδιαία ἀκτίνα.

('Απ. $\vec{Q} = \frac{\pi^2}{6}\hat{y}$)

1.27 Νά προσδιορίσετε τό ὁλοκλήρωμα $I = \oint_S x\hat{x}\cdot d\vec{S}$ ὅπου S ἡ ἐπιφάνεια ἑνός κύβου μέ μοναδιαία ἀκμή, μέ τή μιά του κορυφή στήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί τίς τρεῖς ἀκμές, πού συγκλίνουν στήν κορυφή αὐτή, πάνω στούς θετικούς καρτεσιανούς ἡμιάξονες.

('Απ. $I = 1$)

1.28 Ἔστω ὁ κύκλος

$$x^2 + y^2 = 4 \quad , \; z = 0 \; .$$

Νά ὑπολογίσετε τό ἐπικαμπύλιο ὁλοκλήρωμα $Q = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$ ὅπου $\vec{A}$ εἶναι τό διανυσματικό πεδίο

$$\vec{A} = 2y\hat{x} + 3yz\hat{y} + y\hat{z}$$

καί C ἡ περιφέρεια τοῦ προαναφερμένου κύκλου διαγραφόμενη κατά τή θετική φορά τῆς γωνίας φ. Ὅπως θά προκύψει, ἡ ἀπόδειξη δίνεται εὐκολότερα στό κυλινδρικό σύστημα.

('Απ. $Q = -\int_0^{2\pi} 8\sin^2\varphi \, d\varphi = -8\pi$)

1.29 Νά προσδιορίσετε τό μέγιστο ρυθμό μεταβολῆς τοῦ μονόμετρου πεδίου $\Phi = x^2 + y^2$ σέ κάθε σημεῖο (x,y,z), καθώς καί τή διεύθυνση $\hat{n}$ τοῦ μέγιστου αὐτοῦ ρυθμοῦ στό σημεῖο (1,2,0).

('Απ. $|\vec{\nabla}\Phi| = \sqrt{4x^2+4y^2}$, $\hat{n} = 0{,}45\hat{x} + 0{,}89\hat{y}$)

1.30 Νά ἐξετάσετε ἄν τό διανυσματικό πεδίο $\vec{A} = 3xy^2\hat{x} + 5z\hat{y} + xz\hat{z}$ ἔχει πηγή ἤ καταβόθρα στό σημεῖο (1,3,2) .

('Απ. 'Αφοῦ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 10 > 0$ στό σημεῖο αὐτό ὑπάρχει πηγή τοῦ $\vec{A}$) .

1.31 Τό διάνυσμα θέσης τοῦ σημείου (x,y,z) εἶναι ὅπως ξέρουμε $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, προσδιορίστε τήν ἀπόκλιση $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$ καί δεῖξτε ὅτι

$$\oint_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = 3V$$

ὅπου V ὁ ὄγκος πού περιορίζει μιά αὐθαίρετη κλειστή ἐπιφάνεια S

('Απ. $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$)

1.32 Ἄς θεωρήσουμε ἕνα διανυσματικό πεδίο $\vec{A}$ πού σέ κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων ἐκφράζεται $\vec{A} = \rho\hat{\varphi}$. Στή θέση $\rho = 0$ νά προσδιορίσετε τόν rot$\vec{A}$ θεωρώντας τον ὡς τή μέγιστη κυκλοφορία τοῦ $\vec{A}$ ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας μέ ὑπολογισμό τοῦ $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$ πάνω σέ μιά περιφέρεια μέ ἀκτίνα α, στό ἐπίπεδο ρφ, καί παίρνοντας τό ὅριο γιά $\alpha \rightarrow 0$.

'Επαληθεύσετε τό ἀποτέλεσμα ὑπολογίζοντας τόν rot$\vec{A}$ μέ τή βοήθεια τῆς γνωστῆς ὁρίζουσας.

('Απ. rot$\vec{A} = 2\hat{z}$)

1.33 Ἄν $\vec{A} = A_o\hat{x}\sin\omega t$ καί $\vec{B} = B_o\hat{x}\sin(\omega t + \varphi)$, νά προσδιορίσετε τή χρονική μέση τιμή $<\vec{A}\cdot\vec{B}>$.

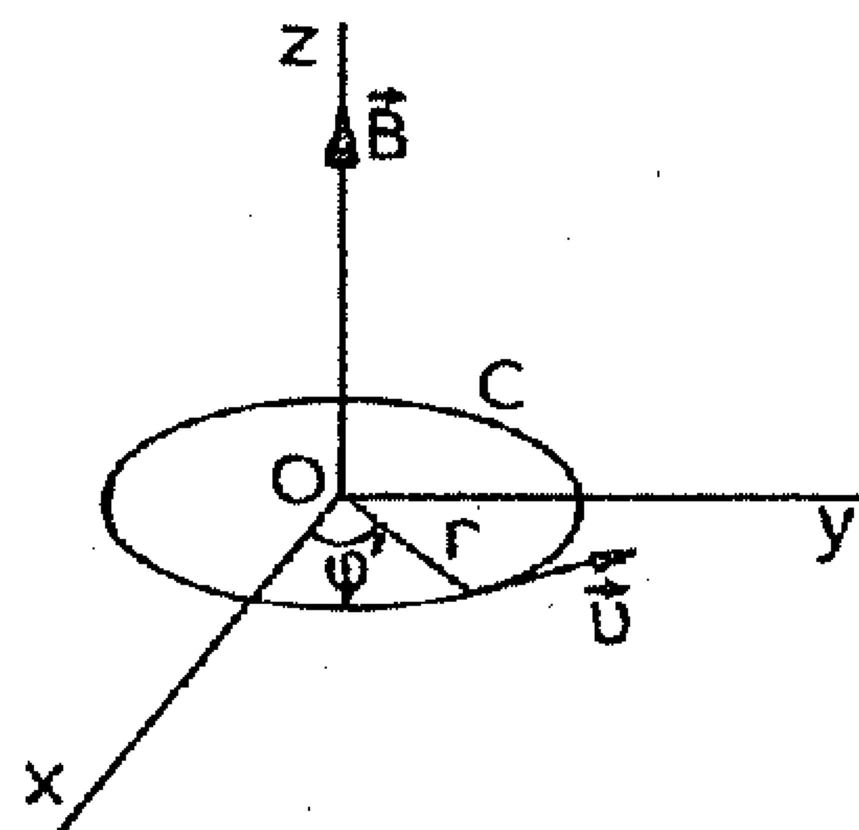
('Απ. $<\vec{A}\cdot\vec{B}> = \frac{1}{2}A_o B_o \cos\varphi$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Τό βήτατρο εἶναι ἐπιταχυντής ἠλεκτρονίων, πού ἐκμεταλλεύεται τό ἠλεκτρικό πεδίο, πού ἐπάγεται ἀπό τή χρονική μεταβολή ἑνός μαγνητικοῦ πεδίου στό χῶρο. Ἄν ὑποτεθεῖ ὅτι ἡ τροχιά τῶν ἐπιταχυνόμενων ἠλεκτρονίων εἶναι περίπου κυκλική καί ὁριζόντια καί ἔχει ἀκτίνα r καί ὅτι τό μαγνητικό πεδίο ἔχει τή μορφή:

$$\vec{B} = C\,t\,\hat{z}$$

ὅπου C = σταθ. , νά προσδιοριστοῦν :



α. τό ἠλεκτρικό πεδίο, πού ἀντιμετωπίζουν τά ἠλεκτρόνια

β. ἡ διαφορά δυναμικοῦ ΔV , πού ἐπάγεται σέ κάθε διαγραφή τῆς τροχιᾶς τοῦ ἠλεκτρονίου καί

γ. ἡ ἀντίστοιχη αὔξηση ΔU τῆς ἐνέργειας τοῦ ἠλεκτρονίου.

Ἐφαρμογή : $C = 10^3$ Weber $m^2 sec^{-1}$, $r = 0{,}01$ m

Λύση

α. Ἀπό τήν δεύτερη ἐξίσωση τοῦ Maxwell σέ ὁλοκληρωτική μορφή ἔχουμε :

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad (1)$$

Ἀλλά $$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = C\hat{z} \quad \text{καί} \quad d\vec{S} = \hat{z}\,dS \qquad (2)$$

"Ωστε $$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} r E_\varphi d\varphi = E_\varphi\, 2\pi r = -C\pi r^2 \qquad (3)$$

ἤ $$E_\varphi = -\frac{r}{2} C \qquad (4)$$

β. Εἶναι :

$$V_2 - V_1 = \Delta V = \int_2^1 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} r E_\varphi d\varphi = -E_\varphi \cdot 2\pi r \qquad (5)$$

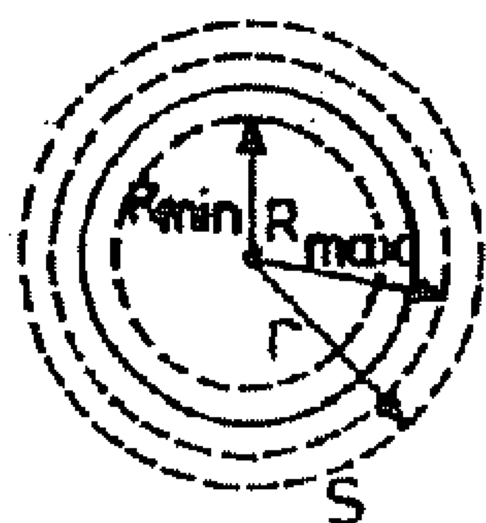
ἤ $$\Delta V = C\pi r^2 \qquad (6)$$

γ. $$\Delta U = e\,\Delta V = C e \pi r^2 \qquad (7)$$

<u>'Εφαρμογή</u> : $E_\varphi = -5\frac{V}{m}$, $\Delta V = 0{,}314\ V$/τροχιά , $\Delta U = 0{,}314\ eV$/τροχιά

2.2 "Ενα ἀγώγιμο σφαιρικό μπαλόνι εἶναι φορτισμένο μέ σταθερό φορτίο Q. 'Η ἀκτίνα τοῦ μπαλονιοῦ αὐξομειώνεται ἡμιτονικά ἀπό μιά ἐλάχιστη τιμή R_{min} ὥς μιά μέγιστη R_{max} . Θά μποροῦσε κανένας νά ὑποθέσει ὅτι μέ τόν τρόπο αὐτό θά παράγεται ἕνα σφαιρικά συμμετρικό ἠλεκτρομαγνητικό κύμα, πού θά διαδίδεται ἀκτινικά. Νά ἀποδείξετε ὅτι δέν συμβαίνει κάτι τέτοιο ὑπολογίζοντας τό ἠλεκτρικό πεδίο E σέ κάποια ἀπόσταση r πέρα ἀπό τήν R_{max} ($r \;\; R_{max}$)

Λ ύ σ η



Λόγω τῆς σφαιρικῆς συμμετρίας τό ἠλεκτρικό πεδίο στή θέση $\vec{r}$ ἔχει μόνο ἀκτινική συνιστώσα :

$$\vec{E} = E_r\, \hat{r} \qquad (1)$$

'Από τήν τρίτη έξίσωση τοῦ Maxwell ἔχουμε :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV \qquad (2)$$

'Εφαρμόζοντάς την γιά τήν έπιφάνεια $S = 4\pi r^2$ καί τόν ὄγκο V πού αὐτή περικλείει, καί λαβαίνοντας ὑπόψη ὅτι :

$$d\vec{S} = \hat{r}\ dS \qquad (3)$$

βρίσκουμε :

$$\varepsilon \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q \qquad \text{ἤ}$$

$$\varepsilon \oint_S E_r\,\hat{r}\cdot\hat{r}\ dS = Q \qquad \text{ἤ}$$

$$\varepsilon E_r \cdot 4\pi r^2 = Q \qquad \text{ὁπότε} \qquad E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\ r^2} \qquad (4)$$

Δηλαδή :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\hat{r} \qquad (5)$$

'Από τήν (5) φαίνεται ὅτι ἡ ἔνταση $\vec{E}$ τοῦ πεδίου στό τυχαῖο $r\,(r > R_{max})$ δέν ἐξαρτᾶται παρά μόνο ἀπό τό σταθερό φορτίο Q τοῦ μπαλονιοῦ, εἶναι χρονικά ἀνεξάρτητη, καί προφανῶς δέν ἀντιστοιχεῖ σέ κύμα.

2.3 "Εστω ὅτι σέ ἕναν περιορισμένο κενό χῶρο (ε_0, μ_0) ὑπάρχει ἕνα ἠλεκτροστατικό πεδίο;

$$\vec{E} = E_0(\sin x\cdot\hat{x} + \cos x\cdot\hat{y})e^{-y} \qquad (1)$$

Νά ὑπολογίσετε τήν πυκνότητα φορτίου στά διάφορα σημεῖα $\vec{r}$ τοῦ χώρου αὐτοῦ.

Λ ύ σ η

'Από τήν $3^{η}$ ἐξίσωση τοῦ Maxwell ἔχουμε :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \qquad (2)$$

Ὥστε γιά ὁποιαδήποτε θέση $\vec{r}(x,y,z)$ τοῦ χώρου πού μελετᾶμε εἶναι

$$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} \qquad (3)$$

Ἐπειδή ὅμως

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \qquad (4)$$

ὅπου: $E_x = E_0 \sin x\, e^{-y}$, $E_y = E_0 \cos x\, e^{-y}$, $E_z = 0$

εἶναι $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = E_0 \cos x\, e^{-y} + (-E_0 \cos x\, e^{-y}) = 0$

Δηλαδή : $\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

Δηλαδή ὁ χῶρος αὐτός δέν πρέπει νά περιέχει φορτία.

2.4 Ἕνας μακρύς κυλινδρικός ἀγωγός μέ ἀκτίνα α καί εἰδική ἀγωγιμότητα $\sigma=\infty$ μεταφέρει ἠλεκτρικό ρεῦμα $I = I_0 \sin\omega t$. Νά προσδιορίσετε σάν συνάρτηση τῆς ἀκτίνας $r\,(r<\alpha\,,\ r>\alpha)$

α. τήν πυκνότητα ρεύματος ἀγωγῆς $J(r)$

β. τήν πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης $J_d(r)$ καί

γ. τήν ἔνταση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου $B(r)$.

(Ἀπ. $J = (I_0/\pi\alpha^2)\sin\omega t$ γιά $0 \leqslant r \leqslant \alpha$ καί $J = 0$ γιά $r>\alpha$

α. $J_d = 0$ γιά ὅλα τά r

β. $B = I/2\pi\mu_0^{-1} r$ γιά $r \geqslant \alpha$

γ. $B = Ir/2\pi\mu_0^{-1}\alpha^2$ γιά $0 < r \leqslant \alpha$)

2.5 Σ' ἕναν ἐπίπεδο πυκνωτή μέ κυκλικούς ὁπλισμούς , πού ἔχουν ἀκτίνα α καί ἀπόσταση d μεταξύ τους, ἐφαρμόζεται ἡ τάση $V = V_o \sin\omega t$. Τό διηλεκτρικό τοῦ πυκνωτη εἶναι τό κενό. Νά προσδιοριστεῖ σάν συνάρτηση τῆς ἀκτίνας r($r < \alpha$)

α. ἡ πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης $J_d(r)$ καί

β. ἡ μαγνητική διέγερση H(r). Ὑποθέστε ὅτι $d \ll \alpha$.

('Απ. α. $J_d = (\varepsilon_0 \omega V_0/d)\cos\omega t$

β. $H_\varphi = r(\varepsilon_0 \omega V_0/2d)\cos\omega t$)

2.6 Μέσα σ' ἕναν ἀγώγιμο κύλινδρο διαδίδεται μιά κυλινδρική ἠλεκτρονική δέσμη, πού ἀποτελεῖται ἀπό σταθερή πυκνότητα φορτίου κινούμενη μέ σταθερή ἀξονική ταχύτητα $\upsilon_o = 10^7$ m/sec. Ἄν ἡ ἀκτίνα τῆς δέσμης εἶναι α = 1mm καί τό ὁλικό ρεῦμα $I_o = 10$ mA, νά ὑπολογίσετε τό ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ μέσα κι ἔξω ἀπό τήν ἠλεκτρονική δέσμη. 'Αλλάζει τό $\vec{E}$ ἄν ἀλλάξει ἡ διάμετρος τοῦ ἀγώγιμου κυλίνδρου ;

('Απ. $E_r = -18\cdot 10^6 r$ γιά $r \leqslant \alpha$

$E_r = -\frac{18}{r}$ γιά $r > \alpha$

Τό $\vec{E}$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή διάμετρο τοῦ κυλίνδρου)

2.7 Ἔστω μιά σφαιρική κατανομή φορτίου στόν ἐλεύθερο χῶρο πού χαρακτηρίζεται ἀπό τήν πυκνότητα φορτίου

$$\rho = \begin{cases} \rho_0\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) & , \quad r \leqslant \alpha \\ 0 & , \quad r > \alpha \end{cases}$$

ὅπου α ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας καί ρ_o σταθερά. Νά προσδιορίσετε τήν ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου γιά ὅλες τίς τιμές τοῦ r .

('Απ. $E_r = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5\alpha^2}\right)$ γιά $r \leqslant \alpha$

$E_r = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\,\frac{2}{15}\,\frac{\alpha^3}{r^2}$ γιά $r > \alpha$)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Νά άποδείξετε ότι τά πεδία $\vec{E}$ καί $\vec{B}$ παραμένουν τά ίδια άν άντί τών δυναμικών $\vec{A}$ καί Φ χρησιμοποιήσουμε τά δυναμικά $\vec{A}'=\vec{A}-\vec{\nabla}\Lambda$ καί $\Phi'=\Phi+\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$, όπου $\Lambda=\Lambda(\vec{r},t)$ ένα αύθαίρετο, άρχικά, μονόμετρο πεδίο. Ποιά μορφή παίρνει τότε ή συνθήκη τοῦ Lorentz καί τί συνεπάγεται γιά τό πεδίο Λ ;

Λ ύ σ η

Ίσχύουν οί σχέσεις :

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad (1)$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (2)$$

καί ή συνθήκη τοῦ Lorentz :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\sigma\mu\,\Phi=0 \qquad (3)$$

Θεωρώντας τά νέα δυναμικά έχουμε :

$$\vec{B}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Lambda=\vec{\nabla}\times\vec{A}-0=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B} \qquad (4)$$

$$\vec{E}'=-\vec{\nabla}\Phi'-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=-\vec{\nabla}\Phi-\vec{\nabla}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda=$$

$$=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{\nabla}\Lambda}{\partial t}-\frac{\partial\vec{\nabla}\Lambda}{\partial t}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\vec{E} \qquad (5)$$

Ώστε:

$$\left.\begin{aligned}\vec{B}'&=\vec{B}\\ \vec{E}'&=\vec{E}\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

῾Η νέα μορφή τῆς συνθήκης τοῦ Lorentz θά εἶναι :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \varepsilon\mu \frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \sigma\mu\,\Phi' = 0 \tag{7}$$

ἤ

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda) + \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) + \sigma\mu\left(\Phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) = 0 \tag{8}$$

ἤ

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma\mu\,\Phi\right) - \nabla^2\Lambda + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

Καί χρησιμοποιώντας καί τήν (3) ἔχουμε:

$$\nabla^2\Lambda - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

῞Ωστε,τό ἀρχικά αὐθαίρετο Λ πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τήν (10)πού εἶναι ὁμογενής διαφορική ἐξίσωση κύματος. Τό Λ ἀναφέρεται συνήθως σάν συμβιβαστικό μέτρο τοῦ Lorentz (Lorentz gauge) καί ὁ μετασχηματισμός σάν μετασχηματισμός μέτρου (gauge Transformation).

3.2 Νά ἀποδείξετε ὅτι τό στατικό διανυσματικό δυναμικό πού δίνεται ἀπό τή σχέση :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{4\pi\mu^{-1}R}\, dV' \tag{1}$$

ὅπου $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ ἔχει μηδενική ἀπόκλιση, εἶναι δηλ. σωληνοειδές πεδίο. Στή συνέχεια νά διερευνήσετε ἄν τό γεγονός αὐτό συμβιβάζεται μέ τή συνθήκη τοῦ Lorentz στίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

α. στήν περίπτωση μέσου χωρίς ἀπώλειες ($\sigma = 0$)

β. στήν περίπτωση, πού τά ρεύματα πηγῶν $\vec{J}(\vec{r}')$ εἶναι ρεύματα ἀγωγῆς, καί ὁ ὑπόλοιπος χῶρος ἠλεκτρικά οὐδέτερος.

γ. στήν περίπτωση, πού $\sigma \neq 0$ καί $\Phi(\vec{r}) \neq 0$

Λ ύ σ η

Θέλουμε ν' άποδείξουμε ότι:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \tag{2}$$

έπειδή

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \tag{3}$$

άπό τήν (1) έχουμε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{4\pi\mu^{-1}}\int_V \vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\right]dV' \tag{4}$$

Γιά κάθε διανυσματικό πεδίο $\vec{C}$ καί κάθε μονόμετρο πεδίο u ίσχύει ή ταυτότητα :

$$\vec{\nabla}\cdot(u\vec{C}) = \vec{\nabla}u\cdot\vec{C} + u\,\vec{\nabla}\cdot\vec{C} \tag{5}$$

όπότε

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\right] = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{R}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{r}') \tag{6}$$

'Αλλά είναι:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{r}') = 0 \tag{7}$$

γιατί τό $\vec{J}(\vec{r}')$ δέν έξαρτᾶται άπό τό $\vec{r}$. Δηλαδή :

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\right] = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\vec{J}(\vec{r}') \tag{8}$$

'Αλλά ίσχύει

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right) \tag{9}$$

(βλ.προβλ. 1.10 σχέση (6))

'Από τίς (4) , (8) καί (9) έχουμε :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\mu^{-1}}\int_V \vec{J}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)dV' \tag{10}$$

Σύμφωνα μέ τήν (5) εἶναι :

$$\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\vec{J}(\vec{r}')\right) = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{R}\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{r}') \qquad (11)$$

Ἐπειδή ὅμως ἡ κατανομή τῶν ρευμάτων $\vec{J}(\vec{r}')$ εἶναι χρονικά ἀμετάβλητη, θά πρέπει γιά κάθε ὄγκο V΄ πού περικλείει τό σημεῖο πηγῆς $\vec{r}'$, τό συνολικό εἰσερχόμενο ρεῦμα νά εἶναι ἴσο μέ τό ἐξερχόμενο. Ἄν δηλ. S΄ ἡ ἐπιφάνεια, πού περιορίζει τόν ὄγκο V΄ ἔχουμε :

$$\oint_{S'} \vec{J}(\vec{r}')\cdot\hat{n}\,dS' = \int_{V'} \vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{r}')\,dV' = 0 \qquad (12)$$

Ἐπειδή ὁ ὄγκος V΄ εἶναι αὐθαίρετος, γιά νά ἰσχύει ἡ (12)πρέπει:

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{r}') = 0 \qquad (13)$$

Ἀπό τίς (11) καί (13) ἔχουμε:

$$\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{1}{R}\vec{J}(\vec{r}')\right) = \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\vec{J}(\vec{r}') \qquad (14)$$

Ἀπό τίς (10) καί (14) ἔχουμε :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{4\pi\mu^{-1}}\int_V \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\right)dV' = -\frac{1}{4\pi\mu^{-1}}\oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\hat{n}\,dS' \qquad (15)$$

ὅπου V εἶναι ὅλος ὁ χῶρος, πού περιέχει πηγές. Τόν ὄγκο αὐτό μποροῦμε νά τόν πάρουμε τόσο μεγάλο, ὥστε νά περιλαβαίνει ὅλες τίς πηγές καί πάνω στήν ἐπιφάνεια S νά εἶναι $\vec{J} = 0$.
Τότε θά εἶναι :

$$\oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\hat{n}\,dS' = 0 \qquad (16)$$

Ὥστε :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \qquad (17)$$

Ἡ συνθήκη τοῦ Lorentz εἶναι :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\mu\sigma\Phi=0 \qquad (18)$$

πού γιά τή στατική περίπτωση γίνεται :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\mu\sigma\Phi=0 \qquad (19)$$

α. Σέ μέσο χωρίς άπώλειες, ὅπου $\sigma = 0$ ή συνθήκη (19) δίνει:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0 \qquad (20)$$

Δηλαδή τό άποτέλεσμα (17) συμβιβάζεται, γιά τήν περίπτωση τέτοιου ύλικοῦ , μέ τή συνθήκη τοῦ Lorentz.

β. Στήν περίπτωση αὐτή εἶναι :

$$\Phi(\vec{r})=0 \qquad (21)$$

καί ή (19) δίνει :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0 \qquad (22)$$

Δηλαδή καί πάλι τό άποτέλεσμα συμβιβάζεται μέ τή συνθήκη τοῦ Lorentz.

γ. Στήν περίπτωση αὐτή ή (19) δίνει :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=-\mu\sigma\Phi \qquad (23)$$

Δηλαδή στήν περίπτωση αὐτή ή (17) δέν συμβιβάζεται μέ τή συνθήκη τοῦ Lorentz. Ἄς ζητήσουμε πῶς πρέπει νά τροποποιηθεῖ ή (1) ὥστε ή περίπτωση γ νά συμβιβάζεται μέ τή συνθήκη τοῦ Lorentz :

Χρησιμοποιώντας τό μετασχηματισμό μέτρου τοῦ Lorentz

$$\vec{A}'=\vec{A}-\vec{\nabla}\Lambda \qquad (24)$$

καί άπαιτώντας νά ίσχύει ή (23) έχουμε ὅτι τό συμβιβαστικό μέτρο $\Lambda(\vec{r})$ (Lorentz gauge) τοῦ Lorentz, πρέπει νά ίκανοποιεῖ τήν έξίσωση .

$$\nabla^2\Lambda=\mu\sigma\Phi \qquad (25)$$

Ὥστε στήν περίπτωση αὐτή ή (1) ίσχύει τροποποιημένη:

$$\vec{A}' = \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{4\pi R \mu^{-1}} dV' - \vec{\nabla}\Lambda \qquad (26)$$

ὅπου ἡ Λ προκύπτει ἀπό τήν (25) καί ἰσχύει

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = -\mu\sigma\,\Phi \qquad (27)$$

ὅπως προβλέπει ἡ συνθήκη τοῦ Lorentz.

3.3 Ἔστω ἕνα ἠλεκτρικό δίπολο, πού ἔχει σταθερή ἠλεκτρική ροπή $\vec{p}$. Νά προσδιοριστοῦν :

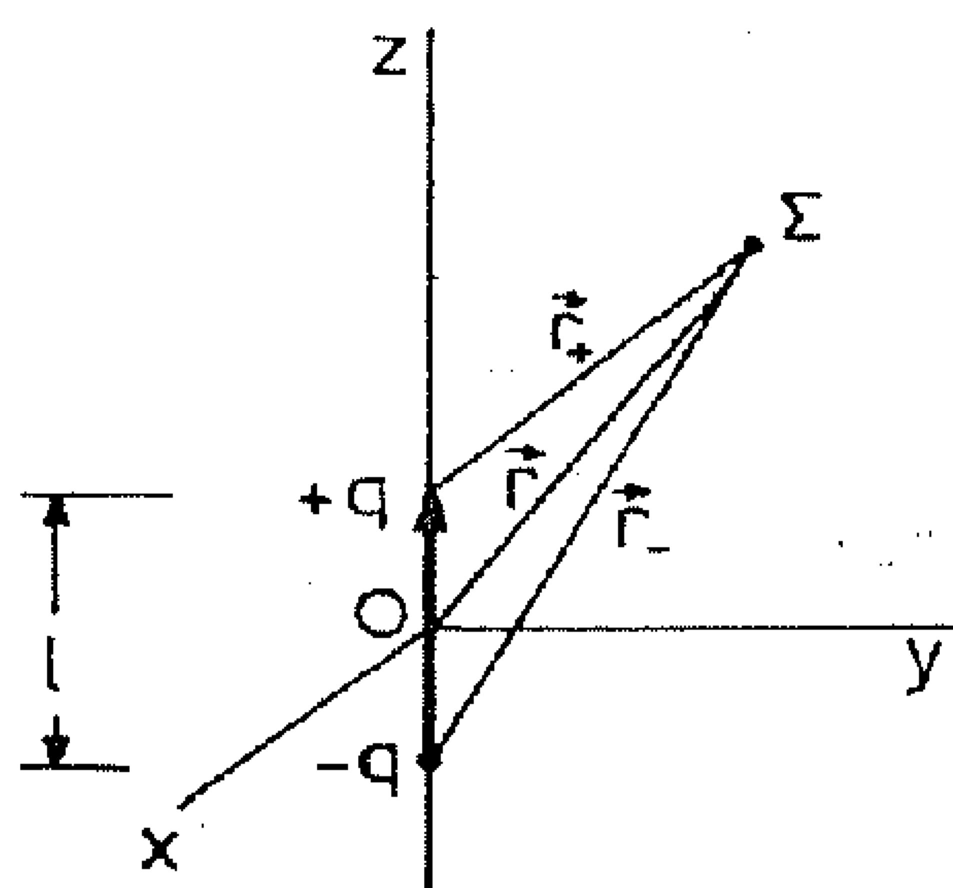
α. Τό δυναμικό $\Phi(\vec{r})$ σέ κάποια θέση $\vec{r}$, μακρινή σέ σχέση μέ τίς διαστάσεις τοῦ διπόλου (πάρτε ὡς ἀρχή τῶν ἀξόνων τό κέντρο τοῦ διπόλου καί ὡς κατεύθυνση τοῦ διπόλου τήν $\hat{z}$).

β. Ἡ ἔνταση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\vec{E}(\vec{r})$ καί ἡ ἠλεκτρική διέγερση $\vec{D}(\vec{r})$ (ἡ διηλ. σταθερά τοῦ μέσου εἶναι ε)

γ. Ἡ ἐξίσωση καί ἡ μορφή τῶν ἠλεκτρικῶν δυναμικῶν γραμμῶν καί

δ. Ἡ ἐξίσωση καί ἡ μορφή τῶν ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν.

Λ ύ σ η



Σχ. 1

α. Τό δυναμικό στή θέση $\vec{r}$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν δυναμικῶν, πού δημιουργεῖ χωριστά καθένα ἀπό τά δύο φορτία (+q , - q) τοῦ διπόλου :

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_+(\vec{r}) + \Phi_-(\vec{r}) \qquad (1)$$

ἤ

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \qquad (2)$$

Ἀληθεύουν οἱ σχέσεις :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (3)$$

$$r_+^2 = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2 \qquad (4)$$

$$r_-^2 = x^2 + y^2 + \left(z + \frac{l}{2}\right)^2 \qquad (5)$$

'Υποθέτοντας ότι $\quad l \ll r \quad$ (6)'

έχουμε :

$$r_+^2 = r^2 - zl + \frac{l^2}{4} \simeq r^2 - zl = r^2\left(1 - \frac{zl}{r^2}\right) \quad (7)$$

$$r_-^2 = r^2 + zl + \frac{l^2}{4} \simeq r^2 + zl = r^2\left(1 + \frac{zl}{r^2}\right) \quad (8)$$

Ώστε

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}\left[\left(1 - \frac{zl}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{zl}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (9)$$

'Από τήν (6) προκύπτει ότι:

$$zl \ll r^2 \quad (10)$$

$$\left(1 - \frac{zl}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{zl}{r^2} \quad (11)$$

$$\left(1 + \frac{zl}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\frac{zl}{r^2} \quad (12)$$

Ώστε

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}\left(\frac{1}{2}\frac{zl}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{zl}{r^2}\right) = \frac{qlz}{4\pi\varepsilon r^3} \quad (13)$$

'Αλλά είναι $\quad z = r\cos\vartheta \quad$ καί $\quad \vec{p} = q\vec{l} \quad$ (14)

Ώστε :

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{p\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon r^2}} \quad (15)$$

ή ακόμα

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3} \quad (16)$$

ή επειδή

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (17)$$

γράφουμε :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{-\vec{p}}{4\pi\varepsilon}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (18)$$

β. Θά έργαστοῦμε σέ σφαιρικές συντεταγμένες καί θά προσδιορίσουμε τό $\vec{E}(\vec{r})$ ώς :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \quad (19)$$

Στίς σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\hat{\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} \quad (20)$$

Ὥστε :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\hat{\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right) \tag{21}$$

Ἀπό τή (15) ἔχουμε:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{p\cos\vartheta}{2\pi\varepsilon r^3} \tag{22}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = -\frac{p\sin\vartheta}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{23}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0 \tag{24}$$

καί ἡ (21) γίνεται:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon r^3}(2\cos\vartheta\,\hat{r} + \sin\vartheta\,\hat{\vartheta})} \tag{25}$$

Δεδομένου ὅτι $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

ἔχουμε :

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi r^3}(2\cos\vartheta\,\hat{r} + \sin\vartheta\,\hat{\vartheta})} \tag{26}$$

γ. Ἡ ἐξίσωση τῶν δυναμικῶν γραμμῶν προσδιορίζεται ἀπό τίς σχέσεις :

$$\frac{dl_r}{D_r} = \frac{dl_\vartheta}{D_\vartheta} = \frac{dl_\varphi}{D_\varphi} \tag{27}$$

ἤ

$$\frac{dl_r}{dl_\vartheta} = \frac{D_r}{D_\vartheta} \qquad \text{καί} \qquad \frac{dl_\varphi}{dl_r} = \frac{D_\varphi}{D_r} \tag{28}$$

Ἀλλά εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} dl_r &= dr \\ dl_\vartheta &= r\,d\vartheta \\ dl_\varphi &= r\sin\vartheta\,d\varphi \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Ἀπό τίς (26) καί (28) προκύπτουν οἱ :

$$\frac{dr}{r\,d\vartheta} = \frac{2\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{30}$$

καί

$$\frac{\sin\vartheta\,d\varphi}{d\vartheta} = 0 \tag{31}$$

'Ολοκληρώνοντας τήν (30) ἔχουμε :

$$r = K \sin^2\vartheta \qquad (32)$$

ὅπου K = σταθ.

'Ολοκληρώνοντας τήν (31) ἔχουμε :

$$\varphi = C = \sigma\tau\alpha\vartheta. \qquad (33)$$

Τό ζευγάρι τῶν ἐξισώσεων (32) καί (33) :

$$\boxed{\begin{aligned} r &= K \sin^2\vartheta \\ \varphi &= C \end{aligned}} \qquad (34)$$

δίνει τήν ἐξίσωση τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ πεδίου .

δ.'Από τή σχέση (15) προσδιορίζουμε τήν ἐξίσωση τῶν ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν :

$$\Phi = \frac{p\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon r^2} = \sigma\tau\alpha\vartheta = C_1 \qquad (35)$$

ὁπότε τά $\cos\vartheta$ καί C_1 πρέπει νά εἶναι ὁμόσημα. 'Από τήν (35) ἔχουμε :

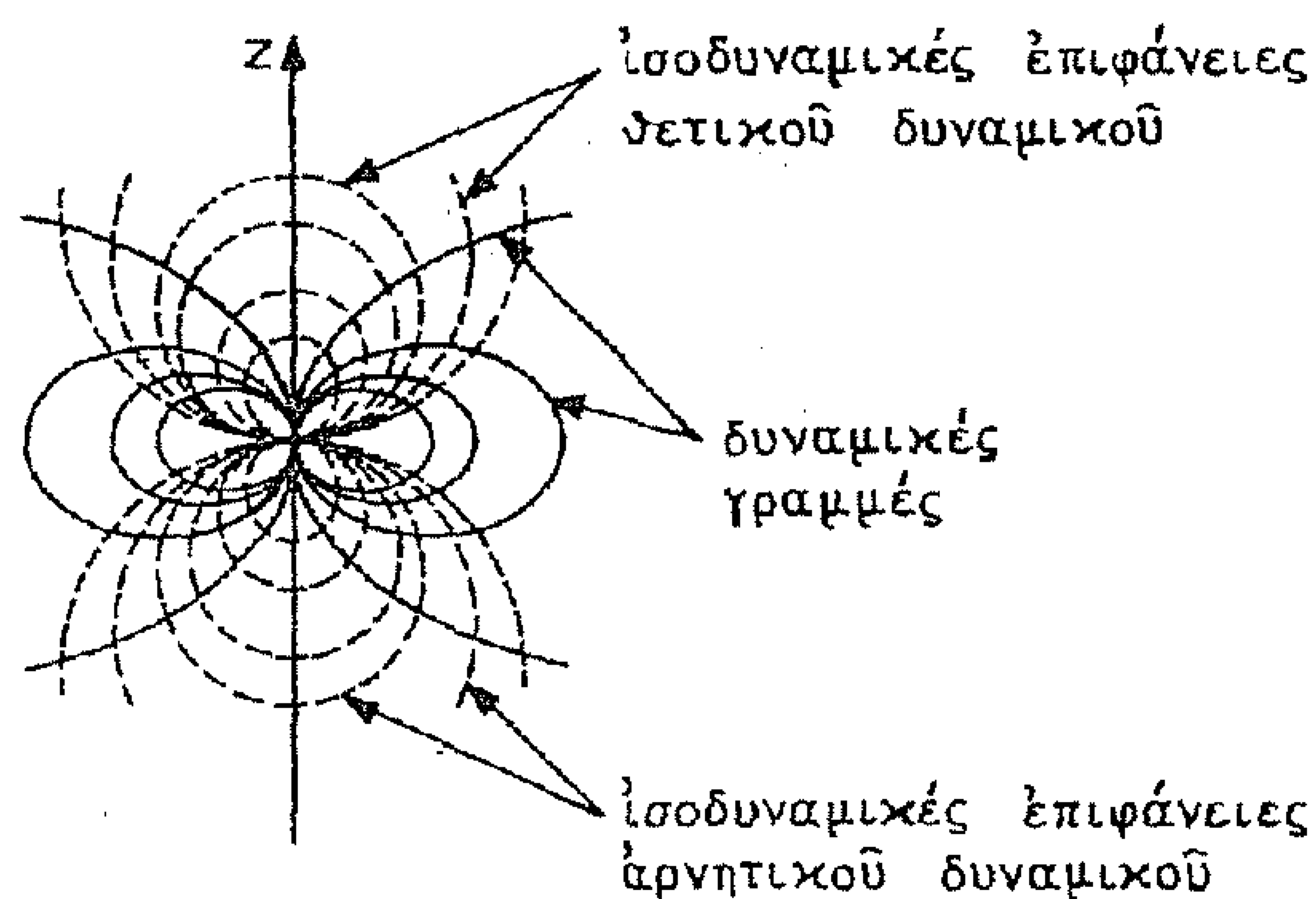
$$\boxed{r^2 = C_2 \cos\vartheta} \qquad (36)$$

'Η (36) γιά διάφορα C_2 , θετικά, ἱκανοποιεῖται στήν περιοχή γωνιῶν $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$ δηλ. στό πάνω ἡμισφαίριο καί δίνει τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες θετικοῦ δυναμικοῦ (βλ. σχῆμα 2), ἐνῶ γιά C_2 ἀρνητικά ἱκανοποιεῖται στήν περιοχή γωνιῶν , $\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ καί δίνει τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες ἀρνητικοῦ δυναμικοῦ (στό κάτω ἡμισφαίριο σχ. 2)

"Αν θέλουμε μέ μιά μόνο ἐξίσωση νά διατυπώσουμε τίς ἰσοδυναμικές ἐπιφάνειες ἀπόλυτου δυναμικοῦ μποροῦμε ἀπό τήν (36) νά γράφουμε :

$$\boxed{r = C_3\sqrt{|\cos\vartheta|}} \qquad (37)$$

ὅπου $C_3 > 0$



Σχ. 2

3.4 Ἔστω τό ἐπίπεδο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα, πού διαδίδεται στό κενό:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$
$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

ὅπου τά $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ καί $\vec{k}$ εἶναι πραγματικά διανύσματα, πού ἀποτελοῦν τρισορθογώνιο σύστημα, καί ω σταθερή κυκλική συχνότητα.

α. Νά προσδιορίσετε τό στιγμιαῖο διάνυσμα Poynting $\vec{P}$, τή συνεχή $\bar{\vec{P}}$ καί τήν ἐναλλασσόμενη $\tilde{\vec{P}}$ συνιστώσα του καί νά δώσετε τή γραφική παράσταση τῶν μέτρων τους P, $\bar{P}$ καί $\tilde{P}$ σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο t, σέ ὁρισμένη θέση $\vec{r}$ τοῦ χώρου.

β. Νά προσδιορίσετε τή μέση ἀκτινοβολούμενη ἰσχύ, πού διαπερνᾶ μιά ἐπίπεδη ἐπιφάνεια S, κάθετη στό $\vec{k}$.

Λ ύ σ η

Μποροῦμε νά γράψουμε:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = (\vec{E}_0 \, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})e^{j\omega t} = \vec{\mathbf{\mathcal{E}}}\, e^{j\omega t} \quad (1)$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) = (\vec{B}_0 \, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})e^{j\omega t} = \vec{\mathbf{\mathcal{B}}}\, e^{j\omega t} \quad (2)$$

ὅπου $\vec{\mathbf{\mathcal{E}}}$ καί $\vec{\mathbf{\mathcal{B}}}$ οἱ phasors τῶν πεδίων.

Έχουμε τότε:

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}^{*}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}\,e^{j2\omega t}) \quad (3)$$

ή

$$\vec{P} = \frac{1}{2\mu_o}\,\mathrm{Re}(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{B}}^{*}) + \frac{1}{2\mu_o}\,\mathrm{Re}(\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{B}}\,e^{j2\omega t}) \quad (4)$$

'Αντικαθιστοῦμε τά $\vec{\mathcal{E}}$ καί $\vec{\mathcal{B}}$ τῶν (1) καί (2) στήν (4)καί ἔχουμε:

$$\vec{P} = \frac{1}{2\mu_o}(\vec{E}_o\times\vec{B}_o) + \frac{1}{2\mu_o}\,\mathrm{Re}(\vec{E}_o\times\vec{B}_o\,e^{j2(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}) \quad (5)$$

ή

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{2\mu_o}E_oB_o\,\hat{k} + \frac{1}{2\mu_o}E_oB_o\,\hat{k}\cos 2(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})} \quad (6)$$

Ὥστε καί:

$$\boxed{\bar{\vec{P}} = \frac{1}{2\mu_o}E_oB_o\,\hat{k}} \quad (7)$$

$$\boxed{\tilde{\vec{P}} = \frac{1}{2\mu_o}E_oB_o\cos 2(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})\cdot\hat{k}} \quad (8)$$

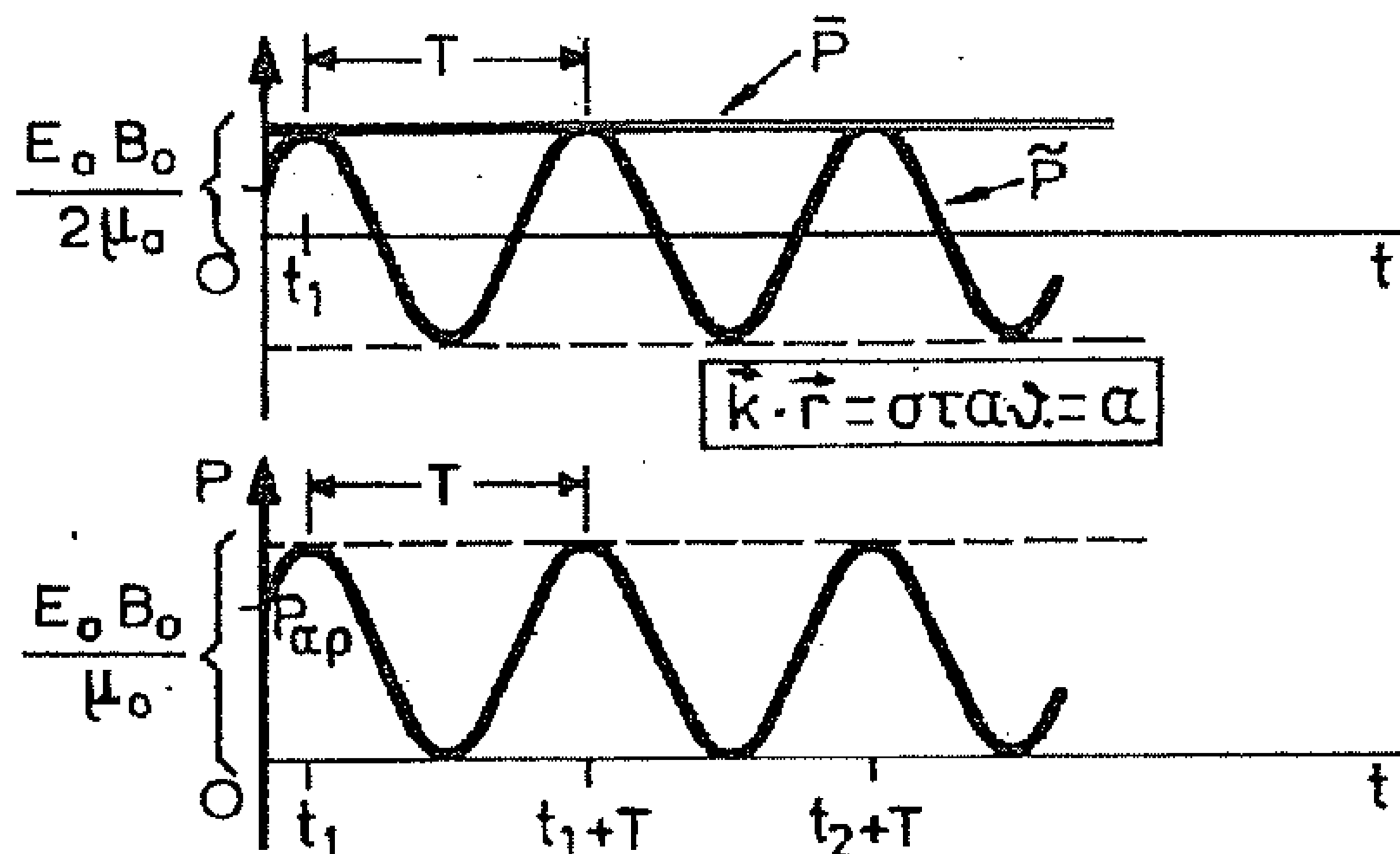
Τά μέτρα τῶν διανυσμάτων εἶναι:

$$P = \frac{1}{2\mu_o}E_oB_o\left(1+\cos 2(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})\right) \quad (9)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2\mu_o}E_oB_o \quad (10)$$

$$\tilde{P} = \frac{1}{2\mu_o}E_oB_o\cos 2(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}) \quad (11)$$

Οἱ ζητούμενες γραφικές παραστάσεις τῶν $P, \bar{P}, \tilde{P}$ δίνονται στό παρακάτω σχῆμα .



῾Η ἀρχική τιμή τοῦ P (γιά t = 0) εἶναι :

$$P_{\alpha\rho} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}(1+\cos 2\alpha) \qquad (12)$$

ἐνῶ τοῦ $\tilde{P}$:

$$\tilde{P}_{\alpha\rho} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}\cos 2\alpha \qquad (13)$$

ἡ περίοδος εἶναι:

$$T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} \qquad (14)$$

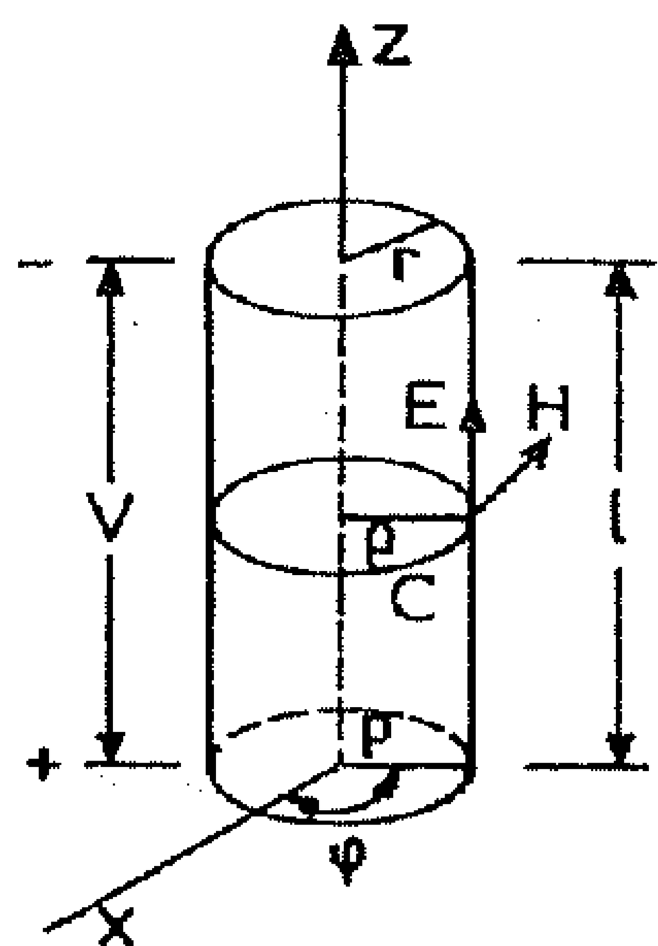
καί ἡ χρονική στιγμή t_1 :

$$t_1 = \frac{\alpha}{\omega} \qquad (15)$$

β. θά ἔχουμε :

$$\bar{N}_{rad} = \int_S \bar{\vec{P}}\cdot\hat{n}\, dS = \bar{P}S = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} S \qquad (16)$$

3.5 Ἕνας κυλινδρικός ἀγωγός διαρρέεται ἀπό σταθερό ρεῦμα I. Ἄν r ἡ ἀκτίνα τοῦ ἀγωγοῦ , R ἡ ἀντίστασή του καί l τό μῆκος του, νά προσδιοριστεῖ τό διάνυσμα Poynting $\vec{P}$ σέ κάθε σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ἀγωγοῦ καί ἡ ἰσχύς, πού καταναλώνεται στόν ἀγωγό.



Λύση

Χρησιμοποιοῦμε κυλινδρικές συντεταγμέ-(ρ,φ,z). Ἔστω V ἡ διαφορά δυναμικοῦ στά ἄκρα τοῦ ἀγωγοῦ. Τό πεδίο $\vec{E}$ εἶναι:

$$\vec{E} = \frac{V}{l}\hat{z} \qquad (1)$$

ἤ

$$\boxed{\vec{E} = \frac{IR}{l}\hat{z}} \qquad (2)$$

δηλ. εἶναι ἐφαπτομενικό στήν κυλινδρική ἐπιφάνεια. ῾Επομένως, λόγω τῆς ὁριακῆς συνθήκης, ἡ τιμή αὐτή θά εἶναι ἴδια κοντά στήν κυλινδρική ἐπιφάνεια τόσο στό ἐσωτερικό τοῦ ἀγωγοῦ ὅσο καί στό ἐξωτερικό του.

Τό πεδίο $\vec{H}$ ἔχει μόνο συνιστῶσα κατά τή διεύθυνση $\hat{\varphi}$ καί προσδιορίζεται ἀπό τό νόμο τοῦ Ampere ἐφαρμοσμένο σ' ἕναν κύκλο μέ ἀκτίνα r στήν ἄμεση γειτονιά τῆς ἐπιφάνειας τοῦ ἀγωγοῦ (1^{η} ἐξ. τοῦ Maxwell):

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I \tag{3}$$

ἤ

$$2\pi r H_\varphi = I \tag{4}$$

ἤ τελικά :

$$\boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\hat{\varphi}} \tag{5}$$

Τό διάνυσμα Poynting εἶναι :

$$\vec{P} \triangleq \vec{E}\times\vec{H} \tag{6}$$

ἤ

$$\vec{P} = \frac{I^2 R}{2\pi r l}\hat{z}\times\hat{\varphi} = \frac{I^2 R}{2\pi r l}(-\hat{\rho}) \tag{7}$$

ἤ τελικά :

$$\boxed{\vec{P} = -\frac{I^2 R}{2\pi r l}\hat{\rho}} \tag{8}$$

Ὥστε, τό διάνυσμα Poynting κατευθύνεται κάθετα πρός τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ καί μάλιστα πρός τά μέσα. Ἡ ἰσχύς πού ρέει πρός τό ἐσωτερικό τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι :

$$N = \int_S \vec{P}\cdot(-\hat{\rho})\,dS = \frac{I^2 R}{2\pi r l}2\pi r l = I^2 R$$

Εἶναι λοιπόν :

$$\boxed{N = I^2 R} \tag{9}$$

3.6 Ἕνα κατακόρυφο ἠλεκτρικό δίπολο ἔχει μῆκος $l = 10$ cm καί διαρρέεται ἀπό ἡμιτονικό ρεῦμα, πού ἔχει πλάτος $I_0 = 1$ A καί κυκλική συχνότητα $\omega = 10^8\ \text{sec}^{-1}$ (ἐπομένως μπορεῖ νά θεωρηθεῖ στοιχειῶδες) Τό δίπολο ἀκτινοβολεῖ στόν ἐλεύθερο χῶρο (ε_0, μ_0) .

α. Σέ ἀπόσταση $r = 10$km ἀπό τό δίπολο καί στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέ αὐτό, πόσο εἶναι τό πλάτος E_0 τῆς ἔντασης τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\vec{E}$;

β. Σέ πόση ἀπόσταση τό πλάτος τῶν ὅρων τῆς συνιστώσας E_ϑ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, πού ἐξαρτῶνται ἀπό τό $\frac{1}{r^2}$ καί ἀπό τό $\frac{1}{r^3}$ πέφτει στό $\frac{1}{100}$ τῆς τιμῆς τοῦ ὅρου πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό $\frac{1}{r}$;
$(\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m) .

Λ ύ σ η

Οἱ τρεῖς συνιστῶσες τοῦ $\vec{E}$ σέ σφαιρικό σύστημα εἶναι (βλ.σχέσεις 3-178).

$$\mathcal{E}_r(r,t) = \left(\frac{I_o l}{2\pi\varepsilon_o \upsilon r^2} - \frac{j I_o l}{2\pi\varepsilon_o \omega r^3}\right)\cos\vartheta\, e^{j(\omega t - kr)} \qquad (1)$$

$$\mathcal{E}_\vartheta(r,t) = \left(\frac{j I_o l k^2}{4\pi\varepsilon_o \omega r} + \frac{I_o l}{4\pi\varepsilon_o \upsilon r^2} - \frac{j I_o l}{4\pi\varepsilon_o \omega r^3}\right)\sin\vartheta\, e^{j(\omega t - kr)} \qquad (2)$$

$$\mathcal{E}_\varphi(r,t) = 0 \qquad (3)$$

α. Στήν ἀπόσταση r = 10km ἐπικρατεῖ, πρακτικά, μόνο ὁ προσθετέος τῆς E_ϑ, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό $\frac{1}{r}$. Δηλαδή:

$$\vec{E} = Re(\vec{\mathcal{E}}) = Re(\mathcal{E}_\vartheta \hat{\vartheta}) = Re\left[\frac{j I_o l k^2}{4\pi\varepsilon_o \omega r}\sin\vartheta\, e^{j(\omega t - kr)}\hat{\vartheta}\right] =$$

$$= Re\left[\frac{I_o l k^2}{4\pi\varepsilon_o \omega r}\sin\vartheta\, e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{2})}\hat{\vartheta}\right] \qquad ἤ$$

$$\vec{E} = \frac{I_o l k^2}{4\pi\varepsilon_o \omega r}\sin\vartheta\cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right)\hat{\vartheta} \qquad (4)$$

Θέτουμε $k = \frac{\omega}{\upsilon}$ καί $\upsilon = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$ καί ἔχουμε :

$$E_o = \frac{I_o l \omega^2}{4\pi\varepsilon_o \omega \upsilon^2 r}\sin\vartheta = \frac{I_o l\, \omega\, \varepsilon_o \mu_o}{4\pi\varepsilon_o r}\sin\vartheta$$

καί γιά $\vartheta = \pi/2$ εἶναι : $E_o = \frac{I_o l\, \omega\, \mu_o}{4\pi r}$ (5)

Ἐφαρμογή γιά :

$I_o = 1A$

$l = 0{,}1\ m$

$\omega = 10^8\ sec^{-1}$

$\mu_o = 4\pi\cdot 10^{-7}\ H/m$

$r = 10^4\ m$

$$E_0 = \frac{1 \cdot 0{,}1 \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 10^4} \frac{A\,m\,sec^{-1} H}{m\,m} = 10^{-4} \frac{AH}{m\,sec}$$

ἤ

$$E_0 = 10^{-4} \frac{V}{m} = 100 \frac{\mu V}{m} \qquad (6)$$

β. Στήν ἀπόσταση r ἔχουμε γιά τούς λόγους n_2 , n_3 :

$$n_2 \triangleq \frac{\left[(E_\vartheta)_{1/r^2}\right]_o}{\left[(E_\vartheta)_{1/r}\right]_o} = \frac{\frac{1}{\upsilon r}}{\frac{k^2}{\omega}} = \frac{\upsilon}{\omega r} = \frac{c}{\omega r} \qquad (7)$$

$$n_3 \triangleq \frac{\left[(E_\vartheta)_{1/r^3}\right]_o}{\left[(E_\vartheta)_{1/r}\right]_o} = \frac{\frac{1}{\omega r^2}}{\frac{k^2}{\omega}} = \frac{1}{r^2 k^2} = \frac{c^2}{r^2 \omega^2} \doteq n_2^2 \qquad (8)$$

Γιά νά ἔχουμε $n_2 = 1/100$ πρέπει :

$$\frac{c}{\omega r_2} = \frac{1}{100} \qquad \text{καί} \qquad r_2 = \frac{100\,c}{\omega} \qquad (9)$$

ἤ

$$r_2 = \frac{10^2 \cdot 3 \cdot 10^8}{10^8} \frac{m}{sec\ sec^{-1}} = 300\ m$$

$$\underline{r_2 = 300\ m} \qquad (10)$$

Γιά νά ἔχουμε $n_3 = \frac{1}{100}$ πρέπει :

$$\frac{c^2}{r_3^2\,\omega^2} = \frac{1}{100} \qquad \text{καί} \qquad r_3 = \frac{10\,c}{\omega} \qquad (11)$$

ἤ

$$\underline{r_3 = 30\,m} \qquad (12)$$

Ὥστε τό n_2 γίνεται 1/100 στά 300m, ἐνῶ τό n_3 στά 30m .

Π α ρ α τ ή ρ η σ η

Γιά τήν τυχαία ἀπόσταση r ἰσχύουν οἱ (7) καί (8) :

$$n_3 = n_2^2 = \frac{c^2}{r^2 \omega^2} \qquad (13)$$

π.χ. στά 10km εἶναι :

$$n_2 = \frac{c}{r\omega} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^4 10^8} = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$n_3 = n_2^2 = 9 \cdot 10^{-8}$$

ἐπομένως σωστά θεωρήθηκε ὅτι ἐπικρατεῖ ἀποκλειστικά ὁ ὅρος πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό $1/r$.

3.7 Ξέρουμε ὅτι τό πεδίο ἀκτινοβολίας ἑνός στοιχειώδους ἠλεκτρικοῦ διπόλου, πού ἔχει μῆκος l καί διαρρέεται ἀπό ἐναλλασσόμενο ρεῦμα μέ πλάτος I_0 , (γιά ἀρκετά μακρινές ἀποστάσεις ἀπό τό δίπολο) εἶναι (βλ. σχέσεις 3-179) :

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= \mathcal{E}_\vartheta \hat{\vartheta} = \frac{jk^2 I_0 l \sin\vartheta}{4\pi r \varepsilon\omega} e^{j(\omega t - kr)} \hat{\vartheta} \\ \vec{\mathcal{H}} &= \mathcal{H}_\varphi \hat{\varphi} = \frac{jk I_0 l \sin\vartheta}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \hat{\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

α. Νά προσδιοριστεῖ τό στιγμιαῖο διάνυσμα Poynting $\vec{P}$.

β. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ ὁλική μέση ἰσχύς, πού ἀκτινοβολεῖ τό δίπολο στό χῶρο εἶναι :

$$\bar{N}_{o\lambda} = \frac{1}{2} I_0^2 R_r = I_{\varepsilon v}^2 R_r \qquad (2)$$

ὅπου

$$R_r = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = \frac{2\pi}{3} Z \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \qquad (3)$$

ἡ λεγόμενη " ἀντίσταση ἀκτινοβολίας " τοῦ ἠλεκτρικοῦ διπόλου μέσα στό συγκεκριμένο μέσο .

Λ ύ σ η

α. Εἶναι :

$$\vec{P} \triangleq \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2} Re(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*) + \frac{1}{2} Re(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) \qquad (4)$$

'Αντικαθιστῶντας τίς (1) στήν (4) ἔχουμε:

$$\vec{P}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathcal{E}_{\vartheta}\mathcal{H}_{\varphi}^{*}\;\hat{\vartheta}\times\hat{\varphi})+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathcal{E}_{\vartheta}\mathcal{H}_{\varphi}\hat{\vartheta}\times\hat{\varphi}) \qquad (5)$$

'Αλλά
$$\hat{\vartheta}\times\hat{\varphi}=\hat{r} \qquad (6)$$

"Ωστε :
$$\vec{P}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathcal{E}_{\vartheta}\mathcal{H}_{\varphi}^{*}\hat{r})+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathcal{E}_{\vartheta}\mathcal{H}_{\varphi}\hat{r}) \qquad (7)$$

ἤ

$$\vec{P}=\left[\frac{1}{2}\frac{k}{\varepsilon\omega}\left(\frac{klI_0}{4\pi r}\right)^2\sin^2\vartheta-\frac{1}{2}\frac{k}{\varepsilon\omega}\left(\frac{klI_0}{4\pi r}\right)^2\sin^2\vartheta\cos2(\omega t-kr)\right]\hat{r} \qquad (8)$$

'Αλλά
$$\frac{k}{\varepsilon\omega}=\frac{\omega}{\upsilon\varepsilon\omega}=\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\varepsilon}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\triangleq Z \qquad (9)$$

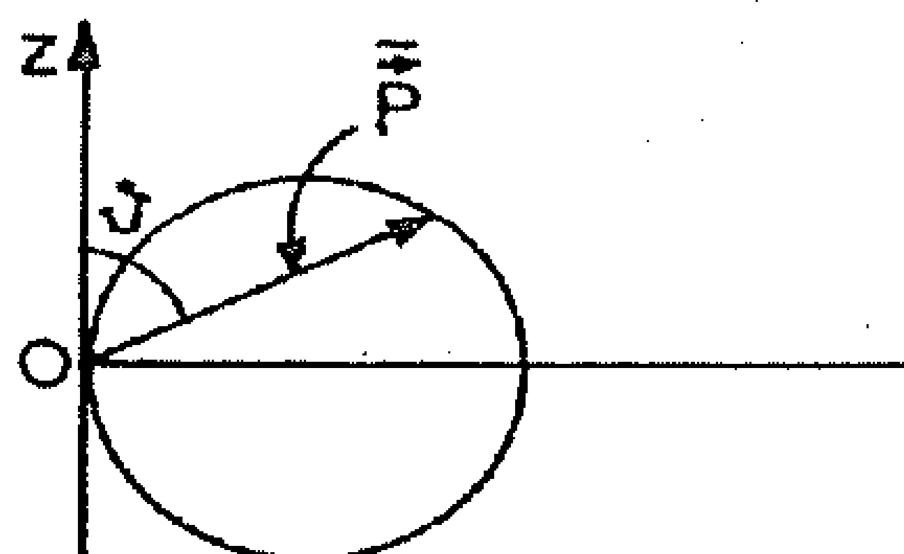
ὅπου Z ἡ " κυματική ἀντίσταση τοῦ μέσου " .

"Ωστε ἡ (8) γίνεται :

$$\boxed{\vec{P}=\left[\frac{1}{2}Z\left(\frac{klI_0}{4\pi r}\right)^2\sin^2\vartheta-\frac{1}{2}Z\left(\frac{klI_0}{4\pi r}\right)^2\sin^2\vartheta\cos2(\omega t-kr)\right]\hat{r}} \qquad (10)$$

ἤ ἁπλούστερα :

$$\vec{P}=(\bar{P}+\tilde{P})\hat{r} \qquad (11)$$



Σχ. 1

"Ωστε ἡ ἰσχύς ἀκτινοβολεῖται κατά τήν ἀκτινική διεύθυνση $\hat{r}$ καί εἶναι ἀνάλογη πρός τό $\sin^2\vartheta$, πού σημαίνει ὅτι κατά τόν ἄξονα τοῦ διπόλου (ϑ = 0) δέν ἀκτινοβολεῖται ἐνέργεια (σχ. 1).

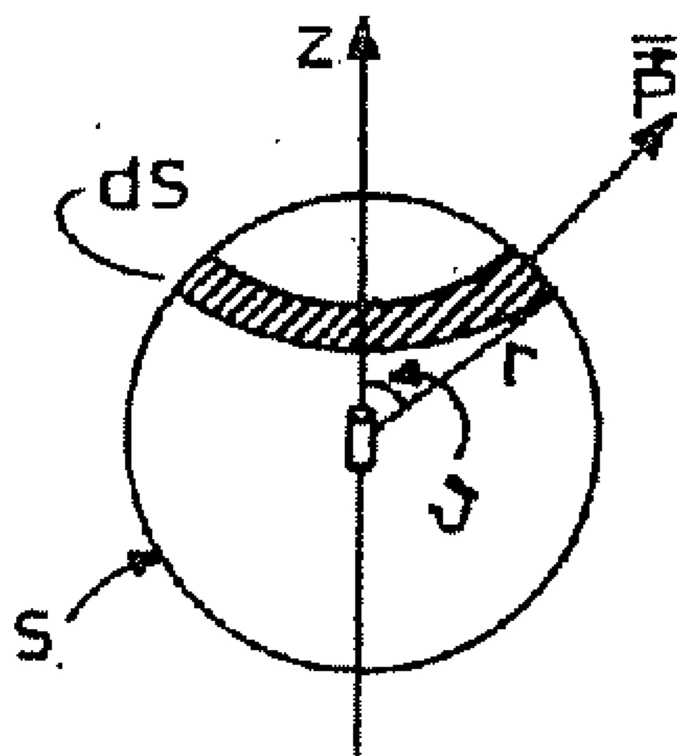
β. Θεωροῦμε μιά σφαίρα πού περιβάλλει τό δίπολο κι ἔχει ἀκτίνα r (βλ. σχ. 2) .

Εἶναι:

$$\bar{N}_{o\lambda}=\oint_S\vec{\bar{P}}\cdot\hat{r}\,dS \qquad (12)$$

'Αλλά $dS=2\pi r^2\sin\vartheta\,d\vartheta$ (13)

καί ἐπομένως :



Σχ. 2

$$\bar{\vec{P}}\cdot\hat{r} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k l I_0}{4\pi}\right)^2 \frac{\sin^2\vartheta}{r^2} \qquad (14)$$

Ὥστε

$$\bar{N}_{o\lambda} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{k l I_0}{4\pi}\right)^2 2\pi \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \qquad (15)$$

Ἀλλά

$$\int_0^{\pi} \sin^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = -\int_0^{\pi} (1-\cos^2\vartheta) d\cos\vartheta = \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} +$$

$$+\left[\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi} = 2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \qquad (16)$$

Ἀπό τίς (15) καί (16) ἔχουμε:

$$\bar{N}_{o\lambda} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{\frac{2\pi}{\lambda} l}{2\pi}\right) \frac{I_0^2}{4} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{\pi}{3} Z \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 \qquad (17)$$

θέτοντας

$$R_r \triangleq \frac{2\pi}{3} Z \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \qquad (18)$$

ἔχουμε :

$$\bar{N}_{o\lambda} = \frac{1}{2} R_r I_0^2 = I_{\varepsilon\nu}^2 R_r \qquad (19)$$

Π α ρ ά τ ή ρ η σ η

Γιά τό κενό (πρακτικά καί γιά τόν ἀέρα) εἶναι :

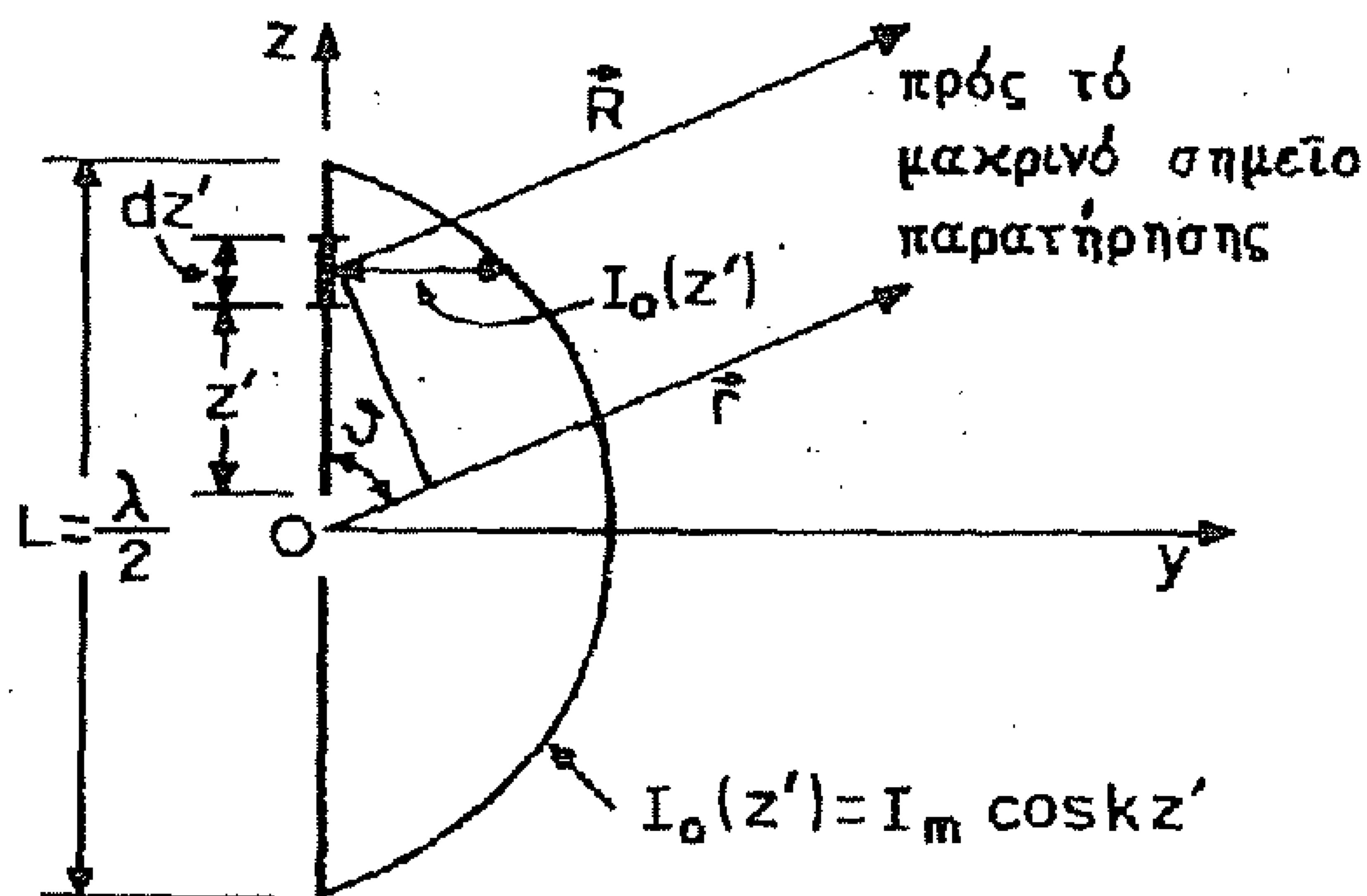
$Z_0 = 120\pi = 377\ \Omega$ καί ἡ (18) δίνει :

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Omega \qquad (20)$$

3.8 Μελέτη ἀκτινοβολίας κεραίας λ/2 :

Θεωρώντας γνωστές τίς ἐξισώσεις τοῦ πεδίου ἀκτινοβολίας τοῦ στοιχειώδους ἠλεκτρικοῦ διπόλου, νά προσδιορίσετε τό πεδίο ἀκτινοβολίας μιᾶς εὐθύγραμμης κεραίας πού τροφοδοτεῖται στό μέσο της μέ ἐναλλασσόμενο ρεῦμα κυκλικῆς συχνότητας ω καί ἔχει μῆκος :

$$L = \frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$



Σχ. 1

(όπου $\lambda = \frac{2\pi\upsilon}{\omega}$ μέ $\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ταχύτητα τοῦ φωτός στόν ἀέρα πού θεωρεῖται ὅτι ἔχει διηλεκτρική σταθερά ε καί μαγνητική διαπερατότητα μ). Δίνεται ὅτι τό πλάτος τοῦ ἐναλλασσόμενου ρεύματος πού διαρρέει τήν κεραία, κατανέμεται κατά μῆκος της σύμφωνα μέ τήν:

$$I_o(z') = I_m \cos kz' \tag{2}$$

ὅπου $k = 2\pi/\lambda = \omega/\upsilon$.

Λ ύ σ η

Ξέρουμε ὅτι τό πεδίο ἑνός στοιχειώδους διπόλου dz' πού βρίσκεται στή θέση z' ἀπό τό μέσο 0 , δίνεται ἀπό τίς (βλ.σχ.3-179) :

$$d\vec{E}(t) = \frac{jk^2 I_o(z')\,dz'}{4\pi\varepsilon\omega R}\sin\vartheta \; e^{j(\omega t-kR)}\hat{\vartheta} \tag{3}$$

$$d\vec{B}(t) = \frac{jk\, I_o(z')\,dz'}{4\pi\mu^{-1}R}\sin\vartheta \; e^{j(\omega t-kR)}\hat{\varphi} \tag{4}$$

Ἀπό τό σχῆμα φαίνεται ὅτι , γιά μεγάλες ἀποστάσεις, ὁπότε οἱ $\vec{r}$ καί $\vec{R}$ εἶναι πρακτικά παράλληλες , ἔχουμε :

$$R = r - z'\cos\vartheta \tag{5}$$

δηλ. ἡ διαφορά μεταξύ R καί r εἶναι μικρή ($\leqslant \lambda/4$) .

Ἡ μικρή αὐτή διαφορά δέν θά ἐπηρεάσει τόν παράγοντα τοῦ πλάτους ὅταν τό r εἶναι ἀρκετά μεγάλο καί μποροῦμε νά βάλουμε ὅπου : $\frac{1}{R} \to \frac{1}{r}$. Ἀντίθετα ὅμως, στόν παράγοντα φάσης, πρέπει νά ληφθῆ ὑπόψη καί ὁ ἐκθετικός ὅρος γράφεται $e^{j\omega t}\, e^{-jkr}\, e^{jkz'\cos\vartheta}$ Παραλείποντας τόν παράγοντα $e^{j\omega t}$ χρονικῆς μεταβολῆς καί παίρ-

νοντας ὑπόψη καί τήν (2) ἔχουμε ἀπό τίς (3) καί (4) γιά τούς phasors τοῦ πεδίου :

$$d\vec{\mathcal{E}} = \frac{jk^2 I_m}{4\pi\varepsilon\omega r} \sin\vartheta \, e^{-jkr} \cos kz' \, e^{jkz'\cos\vartheta} dz' \hat{\vartheta} \qquad (6)$$

$$d\vec{\mathcal{B}} = \frac{jk \, I_m}{4\pi\mu^{-1} r} \sin\vartheta \, e^{-jkr} \cos kz' \, e^{jkz'\cos\vartheta} dz' \hat{\varphi} \qquad (7)$$

Γιά νά πάρουμε, ὁλοκληρώνοντας τίς (6) , (7) τά πεδία $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}}$ πρέπει νά ὑπολογίσουμε τό ὁλοκλήρωμα :

$$Q = \int_{-L/2}^{+L/2} \cos kz' \, e^{jk\cos\vartheta z'} dz' = \frac{1}{jk\cos\vartheta} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos kz' \cdot d(e^{jk\cos\vartheta z'}) =$$

$$= 0 + \frac{k1}{jk\cos\vartheta} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{jk\cos\vartheta z'} \sin kz' dz' = -\frac{1}{k\cos^2\vartheta} \Big[\sin kz' e^{jk\cos\vartheta z'}\Big]_{-\lambda/4}^{\lambda/4} + \frac{k1}{k\cos^2\vartheta} Q$$

Ἐκτελῶντας τίς πράξεις γιά $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ἔχουμε εὔκολα γιά τό Q

$$Q = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{k\sin^2\vartheta} \qquad (8)$$

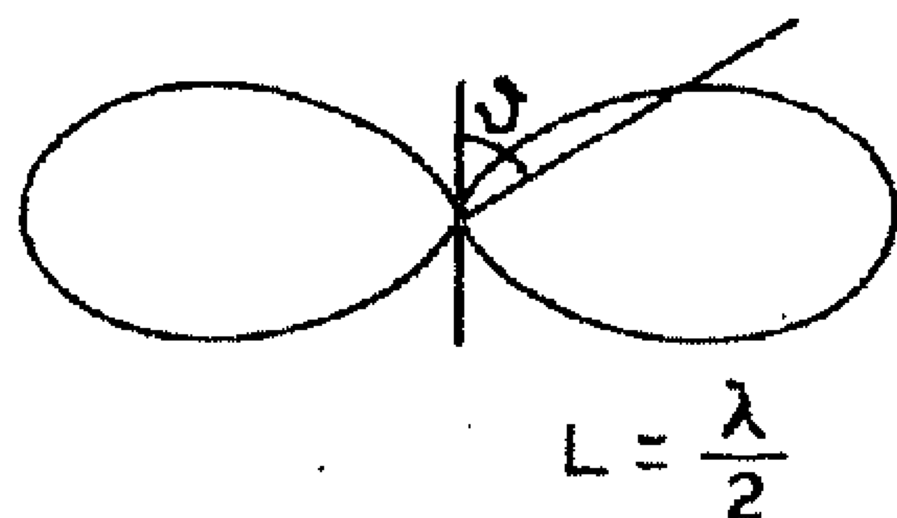
Ὥστε, ἡ ὁλοκλήρωση τῶν (6) καί (7) δίνει:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{jk e^{-jkr} I_m}{2\pi r\varepsilon\omega} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\vartheta}\right] \hat{\vartheta} \qquad (9)$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{j e^{-jkr} I_m}{2\pi\mu^{-1} r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\vartheta}\right] \hat{\varphi} \qquad (10)$$

καί πολλαπλασιάζοντας ἐπί τό χρονικό παράγοντα $e^{j\omega t}$ παίρνουμε τήν πλήρη ἔκφραση τοῦ πεδίου $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)$, $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)$ πού ἔχει μορφή

σφαιρικοῦ κύματος $e^{j(\omega t-kr)}$ μέ πλάτος πού ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τή γωνία ϑ (διάγραμμα χώρου "ἐκ περιστροφῆς") ὅπως φαίνεται στό σχ. 2 .



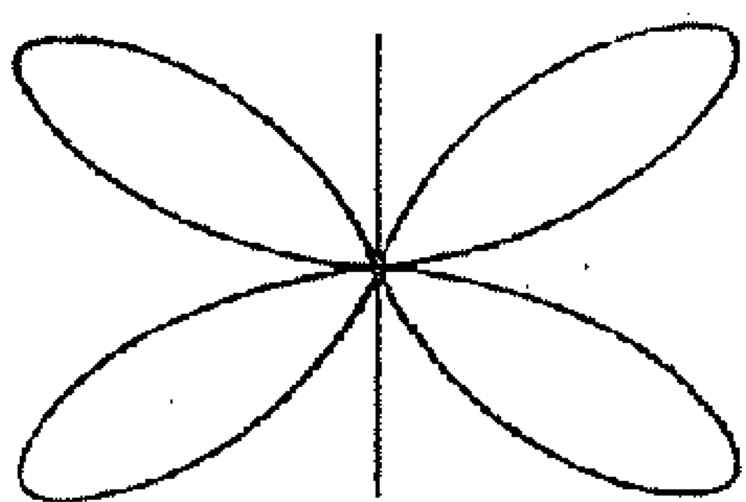
Σχ. 2

Π α ρ α τ ή ρ η σ η : Τελείως ἀνάλογα μέ τήν πιό πάνω μελέτη μποροῦμε νά μελετήσουμε τήν ἀκτινοβολία μιᾶς γραμμικῆς κεραίας ὁποιουδήποτε μήκους L τροφοδοτημένης στό μέσο της. Ἔτσι παίρνουμε γιά τήν ἠλεκτρική ἔνταση τοῦ πεδίου ἀκτινοβολίας:

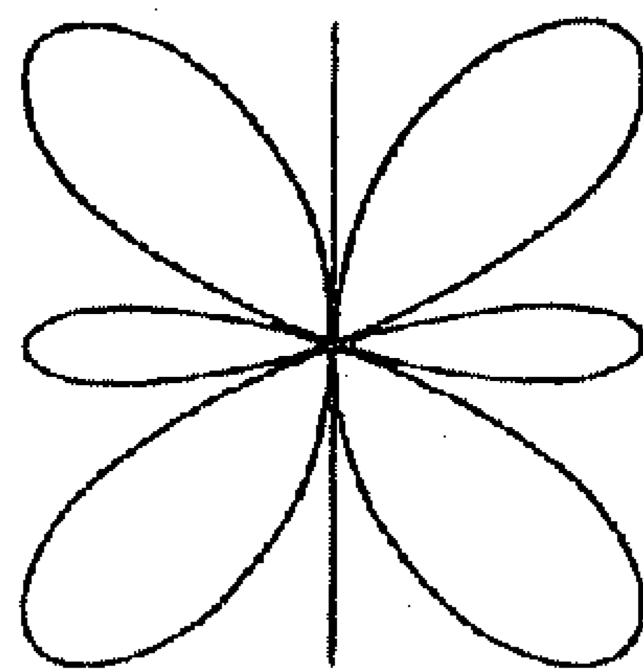
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{jk I_m}{4\pi\varepsilon\omega r}\, e^{j(\omega t-kr)}\left[\frac{\cos(kL\cos\vartheta/2)-\cos(kL/2)}{\sin\vartheta}\right] \qquad (11)$$

ἡ ὁποία γιά L = $\lambda/2$ δίνει βέβαια τήν (9) .

Στό πιό κάτω σχ. 3 φαίνεται τό διάγραμμα πεδίου γραμμικῆς κεραίας γιά τίς περιπτώσεις (α) L = λ καί (β) L = $\frac{3}{4}$ λ .



(α)



(β)

Σχ. 3

3.9 Κάτω ἀπό ποιές συνθῆκες εἶναι δυνατό νά ὁρίσουμε τήν ἔνταση τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου $\vec{B}$ ὡς βαθμίδα ἑνός μονόμετρου μαγνητικοῦ δυναμικοῦ, δηλ. $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi_m$; Ποιά θά εἶναι, τότε, ἡ διαφορική ἐξίσωση τοῦ Φ_m ;

('Απ. Όταν $\vec{\nabla}\times\vec{B}=0$, $\nabla^2 \Phi_m=0$) .

3.10 Ποιές εἶναι οἱ διαφορικές ἐξισώσεις γιά τά πεδία $\vec{H}$ καί $\vec{J}$ μέσα σ' ἕναν ἀγωγό ;

('Απ. $\nabla^2\vec{H}=j\omega\mu\sigma\vec{H}$, $\nabla^2\vec{J}=j\omega\mu\sigma\vec{J}$)

3.11 Ἄν στόν κενό χῶρο ὑπάρχει ἡ πυκνότητα ρεύματος :

$$\vec{J}=J_o \sin\alpha x\,\hat{x} \quad , \quad \alpha=\sigma\tau\alpha\vartheta.$$

α. Νά γραφεῖ ἡ σχετική διαφορική ἐξίσωση γιά τό διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$.

β. Νά ὑπολογιστεῖ τό διανυσματικό δυναμικό ὑποθέτοντας ὅτι δέν ὑπάρχει ἐξάρτησή του ἀπό τά y , z .

γ. Νά ὑπολογιστεῖ τό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.

('Απ. (α) $\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}=-\mu_o\vec{J}$

(β) $\vec{A}=\left[\dfrac{\mu_o J_o}{\alpha^2}\sin\alpha x+C_1 x+C_2\right]\hat{x}$

(γ) $\vec{B}=0$)

3.12 Δύο ἀπέραντα καί παράλληλα ἀγώγιμα ἐπίπεδα βρίσκονται στίς θέσεις z = 0 καί z = α . Ἀναμεσά τους ὑπάρχει τό ἐναλλασσόμενο ἠλεκτρικό πεδίο

$$\vec{\mathcal{E}}=E_o\sin\frac{\pi z}{\alpha}\hat{x}e^{j\omega t}$$

α. Νά προσδιορίσετε τά μεγέθη $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{E}}$ καί $\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}}$ σέ ὅλα τά σημεῖα ἀνάμεσα στά ἐπίπεδα.

β. Μπορεῖ τό $\vec{\mathcal{E}}$ νά ἐκφραστεῖ σάν $\vec{\mathcal{E}}=-\vec{\nabla}\Phi$ ὅπου Φ μονόμετρο δυναμικό ;

γ. Νά προσδιοριστεῖ τό μαγνητικό πεδίο $\mathcal{B}$ ἀνάμεσα στά δύο ἐπίπεδα.

('Απ. (α) $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{E}}=0$, $\vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}}=E_0\frac{\pi}{\alpha}\cos\frac{\pi z}{\alpha}e^{j\omega t}\hat{y}$

(β) "Οχι , γιατί $\vec{\nabla}\times\vec{E}\neq 0$

(γ) $\vec{\mathcal{B}}=\frac{j\pi E_0}{\omega\alpha}\cos\frac{\pi z}{\alpha}e^{j\omega t}\hat{y}$)

3.13 "Εστω ὅτι ὑπάρχει στό χῶρο ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο τῆς μορφῆς

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\vec{\mathcal{E}}_0 e^{j(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})} \quad (1)$$

ὅπου $\vec{k}$ εἶναι σταθερό πραγματικό διάνυσμα, $\vec{\mathcal{E}}_0 = \vec{E}_0 e^{j\varphi}$ ἕνας σταθερός phasor καί ω μιά σταθερή κυκλική συχνότητα. .

α. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό πεδίο τῆς (1) ἀποτελεῖ ἕνα ἐπίπεδο κύμα, πού διαδίδεται κατά τήν κατεύθυνση τοῦ $\vec{k}$ μέ ταχύτητα ω/k. (Νά δειχτεῖ δηλ. ὅτι οἱ ἰσοφασικές ἐπιφάνειες τοῦ κύματος εἶναι ἐπίπεδα, πού ἡ ἀπόστασή τους ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων μεγαλώνει μέ ρυθμό ω/k) .

β. Ὑποθέτοντας ὅτι τό ὑλικό, μέσα στό ὁποῖο διαδίδεται τό κύμα (1) δέν ἔχει ἀπώλειες ($\sigma = 0$) καί δέν περιέχει πηγές ($\rho = 0$, $\vec{\mathcal{J}}_i = 0$) καί ὅτι ἡ διηλεκτρική σταθερά του καί ἡ μαγνητική διαπερατότητά του εἶναι ἀντίστοιχα , ε καί μ, νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathcal{E}}$ ἱκανοποιεῖ τήν ἀντίστοιχη διαφορική ἐξίσωση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἀρκεῖ νά εἶναι $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$.

γ. Κάνοντας χρήση τῆς 3^{ης} ἐξίσωσης τοῦ Maxwell νά ἀποδειχτεῖ ὅτι $\vec{\mathcal{E}}\perp\vec{k}$. (δηλ. νά δειχθεῖ ὅτι $\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{k}=0$)

δ. Νά προσδιοριστεῖ ὁ phasor $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου πού συνοδεύει τό ἠλεκτρικό τῆς (1) καί νά ἀποδειχτεῖ

ὅτι ἡ τριάδα $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}}$, $\vec{k}$ ἀποτελεῖ τρισορθογώνιο σύστημα διανυσμάτων.

ε. Νά προσδιοριστοῦν τά πραγματικά διανύσματα $\vec{E}$,$\vec{B}$ καί $\vec{H}$ καί νά ἀποδειχτεῖ ὅτι εἶναι $Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ (τό Z εἶναι ἡ λεγόμενη κυματική ἀντίσταση τοῦ μέσου) .

3.14 Μέσα σ' ἕνα ἀγώγιμο μέσο, μέ είδική ἀγωγιμότητα σ διαδίδεται ἕνα ἠλεκτρομαγνητικό κύμα, πού ἔχει ἠλεκτρικό πεδίο

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_y\hat{y} = E_0 e^{-ax} e^{j(\omega t - ax)}\hat{y} \tag{1}$$

ὅπου

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{2}$$

(βλ. Θεωρία Κεφ. 3.5.2)

α. Νά προσδιοριστεῖ ἡ μαγνητική διέγερση $\vec{\mathcal{H}}$ πού συνοδεύει τό $\vec{\mathcal{E}}$ τῆς (1) .

β. Νά προσδιοριστεῖ ἡ κυματική ἀντίσταση (Z_c) τοῦ ἀγώγιμου μέσου, πού ὁρίζεται :

$$Z_c \triangleq \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}} \tag{3}$$

γ. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό πραγματικό μέρος τῆς Z_c ἐκφράζει τήν ἀντίσταση R_S, πού παρουσιάζει κατά μῆκος της μιά πλάκα ἀπό τό ἀγώγιμο ὑλικό μέ μῆκος l , πλάτος w καί πάχος d, ὅπου $l = w = 1m$ καί $d = x_0 = \frac{1}{\alpha}$ (δηλ. d ἴσο μέ τό βάθος διείσδυσης τοῦ ὑλικοῦ). Σημειώνεται ὅτι ἡ R_S λέγεται καί " ἐπιδερμική ἀντίσταση " τοῦ ὑλικοῦ .

('Απ. (α) $\vec{\mathcal{H}} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\omega\mu}\mathcal{E}_y e^{-j\frac{\pi}{4}}\hat{z}$

δηλ. ἐμφανίζει διαφορά φάσης 45^o ὡς πρός τό $\vec{\mathcal{E}}$.

(β) $$Z_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}\angle 45^\circ$$

(γ) $$R_S = \frac{1}{\sigma x_o} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \operatorname{Re} Z_c \quad)$$

3.15 Ἕνα ἐπίπεδο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα μέ συχνότητα 3GHz πέφτει πάνω σ' ἕνα μεγάλο φύλλο πολυστερίνης πού ἔχει σχετική διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon_r = 2{,}7$. Πόσο πάχος πρέπει νά ἔχει τό φύλλο ὥστε νά ἐπιβραδύνει τή φάση τοῦ κύματος, πού τό διαπερνᾶ, κατά 180^o σέ σύγκριση μέ τό μέρος τοῦ κύματος, πού περνᾶ μέσα ἀπό μιά μεγάλη τρύπα τοῦ διηλεκτρικοῦ φύλλου ;

('Απ. d = 77,7 mm) .

3.16 Ἕνα μακρύ πηνίο μέ ἀκτίνα σπειρῶν r διαρρέεται ἀπό σταθερό ρεῦμα I. Μελετώντας ἕνα κομμάτι τοῦ πηνίου, μέ μῆκος l καί ἀριθμό σπειρῶν N

α. Νά προσδιορίσετε τό διάνυσμα Poynting $\vec{P}$ πάνω στήν κυλινδρική ἐπιφάνεια S, πού μόλις περιβάλλει τό μέρος αὐτό τοῦ πηνίου, κατά τή διάρκεια τῆς ἀποκατάστασης τοῦ ρεύματος I, .

β. Νά ὑπολογίσετε τήν ἰσχύ N πού εἰσρέει καί ἀποθηκεύεται στό μέρος αὐτό τοῦ πηνίου κατά τή διάρκεια τῆς ἀποκατάστασης τοῦ ρεύματος καί

γ. Νά ὑπολογίσετε τήν ἐνέργεια W πού εἶναι ἀποθηκευμένη στό ἐσωτερικό τοῦ μέρους αὐτοῦ τοῦ πηνίου , ὅταν πιά ἔχει ἀποκατασταθεῖ τό ρεῦμα I .
(Θεωρῆστε ὅτι εἶναι i ἡ στιγμιαία τιμή τοῦ ρεύματος καί ὅτι εἶναι γνωστός ὁ συντελεστής αὐτεπαγωγῆς τοῦ τμήματος αὐτοῦ τοῦ πηνίου $L = \frac{\pi r^2 \mu N^2}{l}$)

('Απ. α. $\vec{P} = -\frac{\mu N^2 r i}{2l^2}\frac{\partial i}{\partial t}\hat{\rho}$

β. $N = \int_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = L\, i\, \frac{di}{dt}$

γ. $W = \int_{i=0}^{I} N dt = \frac{1}{2} L I^2$)

3.17 Ένα ὁμοαξονικό καλώδιο ἀποτελεῖται ἀπό ἕναν ἐσωτερικό κυλινδρικό ἀγωγό μέ ἀκτίνα α καί ἀπό ἕναν ἐξωτερικό ἀγώγιμο κύλινδρο μέ ἀκτίνα b. Στήν περίπτωση πού οἱ ἀγωγοί εἶναι τέλειοι, μποροῦν νά μεταφέρουν συνεχή (dc) ἰσχύ μέσω ἐπιφανειακῶν ρευμάτων πάνω τους, πού ρέουν μέ ἀντίθετες κατευθύνσεις μέσα στόν ἐσωτερικό καί στόν ἐξωτερικό κύλινδρο. Ἄν ἡ τάση στό ἄκρο τοῦ καλωδίου (μεταξύ τῶν δύο κυλίνδρων) εἶναι V καί τό ὁλικό ρεῦμα I

α. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ,φ,z) καί ὑποθέτοντας γνωστό ὅτι στό χῶρο ἀνάμεσα στούς κυλινδρικούς ἀγωγούς εἶναι :

$$V(\rho) = V\frac{\ln\frac{\rho}{b}}{\ln\frac{\alpha}{b}} \quad \text{καί} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi},$$

νά προσδιορίσετε στό χῶρο αὐτό τό διάνυσμα Poynting.

β. Πόση ἰσχύς N μεταφέρεται ἀπό τό ὁμοαξονικό καλώδιο ;

('Απ. α. $\vec{P} = -\frac{VI}{2\pi\rho^2 \ln\frac{\alpha}{b}}\hat{z}$

β. $N = VI$)

3.18 Ένα ἐπίπεδο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα μέ συχνότητα 100 MH_z ἔχει μέσο διάνυσμα Poynting μέ μέτρο 5 Wm^{-2} καί διαδίδεται μέσα σέ μέσο, πού ἔχει $\mu_r = 2$ καί $\varepsilon_r = 2$. Νά προσδιορίσετε :

α. Τήν ταχύτητα τοῦ κύματος

β. Τό μῆκος κύματος

γ. Τήν κυματική ἀντίσταση τοῦ μέσου

δ. Τήν ἐνεργό τιμή E_{eff} τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\vec{E}$ καί

ε. Τήν ἐνεργό τιμή H_{eff} τῆς μαγνητικῆς διέγερσης $\vec{H}$.

('Απ. α. $\upsilon = 150$ Mm/sec

β. $\lambda = 1,5$ m

γ. $Z = 377\,\Omega$

δ. $E_{eff} = 43,4$ V/m

ε. $H_{eff} = 115,1$ mA/m)

3.19 Ἕνα ἐπίπεδο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα ἔχει μέγιστο πλάτος ἠλεκτρικοῦ πεδίου $E_0 = 6$ V/m . Ἄν τό μέσο ὅπου διαδίδεται τό κύμα δέν ἔχει ἀπώλειες καί ἔχει $\varepsilon_r = 3$ καί $\mu_r = 1$, νά προσδιοριστοῦν :

α. Ἡ ταχύτητα τοῦ κύματος

β. Τό μέγιστο πλάτος τοῦ διανύσματος Poynting.

γ. Ἡ μέση τιμή τοῦ διανύσματος Poynting

δ. Ἡ κυματική ἀντίσταση τοῦ μέσου καί

ε. Τό μέγιστο πλάτος τῆς μαγνητικῆς διέγερσης H_0 .

('Απ. α. $173,2 \cdot 10^6$ m/s

β. $165,4$ mW/m^2

γ. $82,7$ mW/m^2

δ. $217,7\,\Omega$

ε. $27,6$ mA/m)

3.20 Θεωροῦμε μιά δέσμη ἐπίπεδου κύματος, μέ ἐγκάρσια διατομή $1\ m^2$, πού διαδίδεται στόν ἀέρα καί μεταφέρει ὁλική μέση ἰσχύ 100 W .

α. Πόσο εἶναι τό μέγιστο πλάτος E_0 , B_0 τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἀντίστοιχα ;

β. Πόση εἶναι ἡ μέση πυκνότητα τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἐνέργειας στό χῶρο τῆς δέσμης ;

('Απ. α. $E_0 = 274\ V/m$, $B_0 = 9,16 \cdot 10^{-7} Wb/m^2$

β. $w = 0,33 \cdot 10^{-6} J/m^3$)

3.21 'Η γῆ δέχεται ἀπό τόν ἥλιο φωτεινή ἀκτινοβολία μέ ἔνταση $0,14\ Wcm^{-2}$.

α. Νά προσδιοριστεῖ τό μέτρο τοῦ διανύσματος Poynting

β. Ἄν ὁ ἥλιος ὑποτεθεῖ ἰσότροπη πηγή ἀκτινοβολίας πόση εἶναι ἡ συνολική ἰσχύς πού ἀκτινοβολεῖ ;

γ. Ποιά εἶναι ἡ ἐνεργός τιμή τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου στή γῆ ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ὅλο τό ἡλιακό φῶς ἀντιστοιχεῖ σέ μιά μόνο συχνότητα ; ('Απόσταση Γῆ – Ἥλιος ≃ 150 Gm) .

('Απ. α. $\bar{P} = 1,4\ kW\, m^{-2}$

β. $N = 3,96 \cdot 10^{26}\ W$

γ. $E_{eff} = 726,5\ Vm^{-1}$)

3.22 'Ο ἥλιος ἐκπέμπει ραδιοκύματα στήν περιοχή τῶν 3 GHz πού φτάνουν στή Γῆ μέ φασματική πυκνότητα ἐντάσεως $P_f = 10^{-20}\ W/m^2 Hz$.

α. Ἄν ἡ P_f θεωρηθεῖ σταθερή σέ μιά ζώνη εὔρους Δf = 1GHz, πόσο εἶναι τό μέτρο $\bar{P}$ τοῦ μέσου διανύσματος Poynting ;

β. Ἄν θεωρηθεῖ ὅτι ἡ ἰσχύς πού ἐκπέμπεται μέσα στή ζώνη Δf ἔχει μιά μόνο συχνότητα, πόση θά εἶναι ἡ ἐνεργός

τιμή E_{eff} τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ; (κυματική ἀντίσταση τοῦ κενοῦ καί τοῦ ἀέρα Z = 120 π = 377 Ω)

γ. Πόση μέση ραδιοκυματική ἰσχύ $\bar{N}$ ἐκπέμπει ὁ ἥλιος μέσα στή ζώνη Δf, ἄν τόν θεωρήσουμε ἰσότροπη πηγή ; (ἀπόσταση Γῆ - Ἥλιος : R = 150 Gm) (Θέμα Ἐξετάσεων Ὀκτωβρίου 1978) .

('Απ. α. $\bar{P} = 10\ pW/m^2$

β. $E_{eff} = 61{,}4\ \mu V/m$

γ. $\bar{N} = 2{,}83\ TW$)

3.23 Σέ προηγούμενο πρόβλημα (προβλ. 3.3) ἀποδείχτηκε ὅτι τό ἠλεκτροστατικό πεδίο πού δημιουργεῖ ἕνα στατικό ἠλεκτρικό δίπολο σέ κάποια μακρινή (σέ σχέση μέ τίς διαστάσεις του) ἀπόσταση $\vec{r}$, εἶναι :

$$\vec{E}_S(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon r^3}(2\cos\vartheta\cdot\hat{r} + \sin\vartheta\cdot\hat{\vartheta}) \qquad (1)$$

Γνωστό εἶναι, ἐπίσης, ὅτι τό ἴδιο δίπολο δέν δημιουργεῖ μαγνητικό πεδίο, δηλ.

$$\vec{B}_S(\vec{r}) = 0 \qquad (2)$$

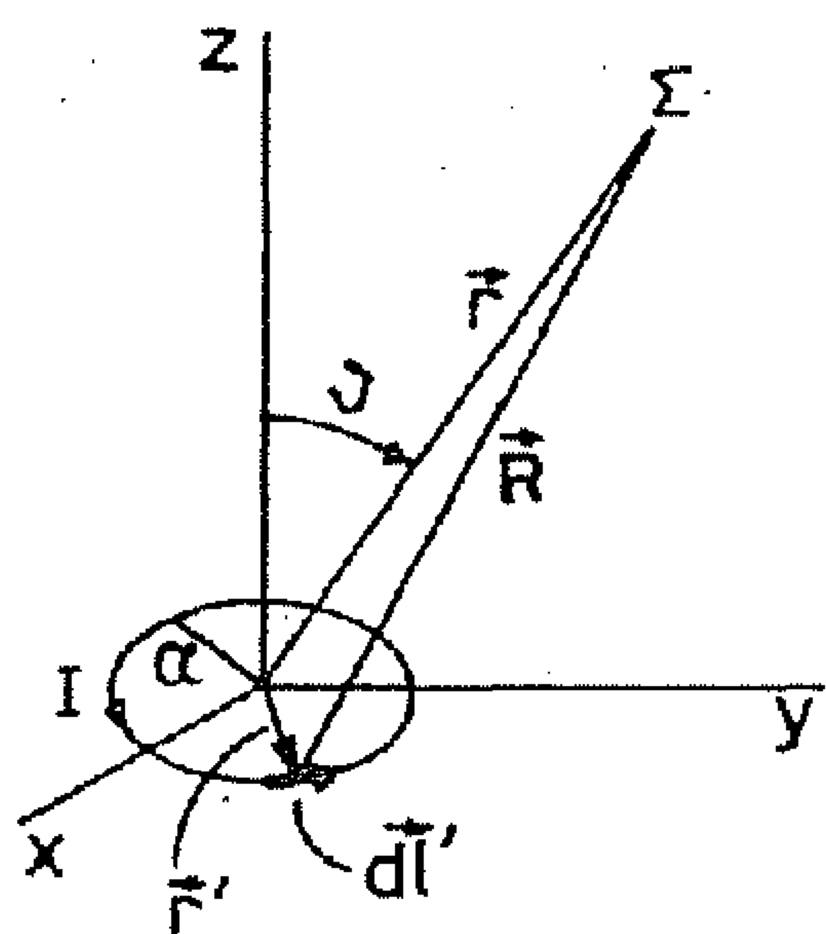
Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ (1) καί (2) μποροῦν νά προκύψουν ἀπό τίς ἐξισώσεις τῶν $\vec{E}(\vec{r})$ καί $\vec{B}(\vec{r})$ τοῦ παλλόμενου ἠλεκτρικοῦ διπόλου (σχέσεις 3-178) σάν ὁριακές περιπτώσεις γιά $\omega \to 0$ (ἐπομένως καί γιά $k \to 0$) .

3.24 Ἔστω ἕνα μαγνητικό δίπολο, πού ἔχει σταθερή μαγνητική ροπή $\vec{m}$, (στατικό μαγνητικό δίπολο). Νά προσδιοριστοῦν :

α. Τό διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(\vec{r})$ σέ κάποια θέση $\vec{r}$ μακρινή σέ σχέση μέ τίς διαστάσεις τοῦ διπόλου (πάρτε ὡς ἀρχή

των άξόνων τό κέντρο τοῦ διπόλου καί διεύθυνση τῆς $\vec{m}$ τήν $\hat{z}$).

β. Τό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r})$ καί ή μαγνητική διέγερση $\vec{H}(\vec{r})$.



γ. Ἡ ἐξίσωση καί ή μορφή τῶν μαγνητικῶν δυναμικῶν γραμμῶν.

δ. Τό μονόμετρο μαγνητικό δυναμικό $\Phi_m(\vec{r})$ καί

ε. Ἡ ἐξίσωση τῶν ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν.

('Απ. α. $\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{m \sin\vartheta}{4\pi\mu^{-1}r^2}\hat{\varphi} = \dfrac{\vec{m}\times\vec{r}}{4\pi\mu^{-1}r^3}$

β. $\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{m}{4\pi\mu^{-1}r^3}[2\cos\vartheta\cdot\hat{r}+\sin\vartheta\cdot\hat{\vartheta}]$

$\vec{H}(\vec{r}) = \mu^{-1}\vec{B}(\vec{r})$

γ. $\left.\begin{aligned} r &= K\sin^2\vartheta \\ \varphi &= C \end{aligned}\right\}$ $\quad K, C$ = σταθερές

δηλ. ή μορφή τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ στατικοῦ ήλεκτρικοῦ διπόλου (βλ. πρόβλ. 3).

δ. $\Phi_m = \dfrac{m\cos\vartheta}{4\pi\mu^{-1}r^2} = \dfrac{\vec{m}\cdot\vec{r}}{4\pi\mu^{-1}r^3}$

ε. ἰσοδυναμικές τοῦ A : $\quad r^2 = C_1 \sin\vartheta$

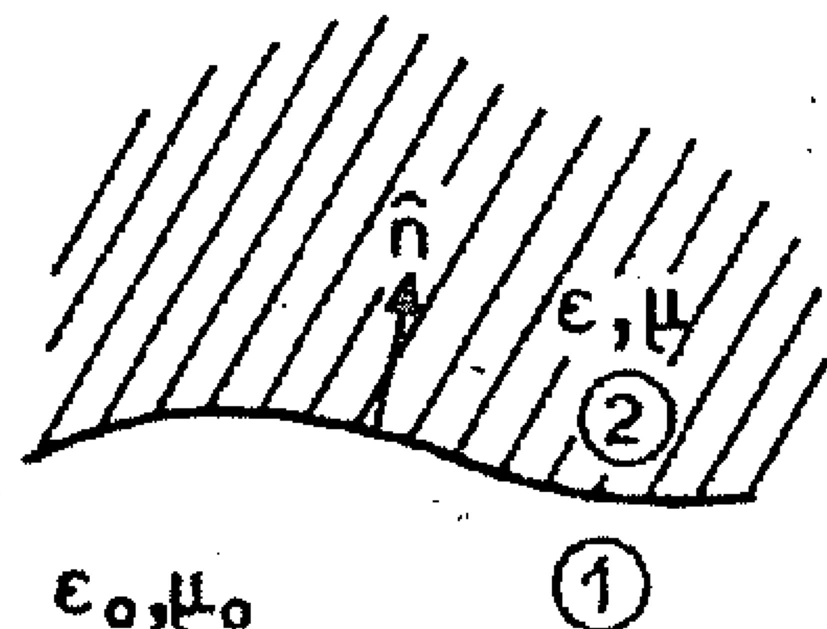
ἰσοδυναμικές τοῦ Φ_m: $\quad r^2 = C_2\cos\vartheta$)

3.25 Μιά πολύ μικρή ἀντίσταση R, μέ κυλινδρική μορφή, ἔχει ἀπώλειες Joule (N_J) ἀλλά ταυτόχρονα ἀκτινοβολεῖ καί σάν στοιχειῶδες ήλεκτρικό δίπολο (N_{rad}). Ἡ R βρίσκεται στόν ἐλεύθερο χῶρο καί τροφοδοτεῖται μέ συχνότητα $f = 10^8$ Hz . Ἄν τό μῆκος της εἶναι $l = 1$cm καί ή διατομή της $S = 1\text{mm}^2$, νά προσδιοριστεῖ ὁ λόγος N_{rad}/N_J α) ἄν ή εἰδική ἀγωγιμότητα τοῦ ὑλικοῦ τῆς R εἶναι

$\sigma = 10^7$ mhos/m καί β) ἄν $\sigma = 10^{-3}$ mhos/m ('Απ.α)8,8 β)8,8 10^{10})

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 Νά θεωρήσετε τήν όριακή ἐπιφάνεια μεταξύ ἑνός ἀφόρτιστου διηλεκτρικοῦ καί τοῦ κενοῦ (βλ. σχῆμα)



α. Ἄν $\vec{E}_1$ καί $\vec{E}_2$ εἶναι τό ἠλεκτρικό πεδίο στή μιά καί στήν ἄλλη πλευρά τῆς όριακῆς ἐπιφάνειας καί $\vec{P}_2$ ἡ ἠλεκτρική πόλωση τοῦ διηλεκτρικοῦ, νά ἀποδείξετε ὅτι

$$\hat{n}\cdot(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=\hat{n}\cdot\frac{\vec{P}_2}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

β. Ἄν $\vec{H}_1$ καί $\vec{H}_2$ εἶναι ἡ μαγνητική διέγερση στή μιά καί στήν ἄλλη πλευρά τῆς όριακῆς ἐπιφάνειας καί $\vec{M}_2$ ἡ μαγνητική πόλωση τοῦ ὑλικοῦ (2) νά ἀποδείξετε ὅτι :

$$\hat{n}\cdot(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\hat{n}\cdot\vec{M}_2 \tag{2}$$

γ. Τί συμπεράσματα βγάζετε ἀπό τά ἀποτελέσματα (1)καί(2);

Λύση

α. Εἶναι: $$\vec{P}_2=\vec{D}_2-\varepsilon_0\vec{E}_2 \tag{3}$$

ἀπό ὅπου ἔχουμε:

$$\vec{E}_2=\frac{\vec{D}_2-\vec{P}_2}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

Ἐξάλλου εἶναι: $$\vec{E}_1=\frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

Ἀπό τίς (4) καί (5) προκύπτει:

$$\hat{n}\cdot(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=-\hat{n}\cdot\frac{\vec{D}_2-\vec{P}_2}{\varepsilon_0}+\hat{n}\cdot\frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)+\hat{n}\cdot\frac{\vec{P}_2}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

'Αλλά ἰσχύει ἡ ὁριακή συνθήκη :

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho_S \qquad (7)$$

ὅπου ρ_S ἡ ἐπιφανειακή πυκνότητα φορτίου (ἐδῶ $\rho_S=0$) .

"Ωστε :

$$\boxed{\hat{n}\cdot(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=\hat{n}\cdot\frac{\vec{P}_2}{\varepsilon_o}} \qquad (8)$$

β. 'Από τίς γνωστές σχέσεις :

$$\vec{H}_2=\mu_o^{-1}\vec{B}_2-\vec{M}_2 \qquad (9)$$

$$\vec{H}_1=\mu_o^{-1}\vec{B}_1 \qquad (10)$$

ἔχουμε :

$$\hat{n}\cdot(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\hat{n}\cdot(\mu_o^{-1}\vec{B}_1-\mu_o^{-1}\vec{B}_2+\vec{M}_2)=$$

$$=\mu_o^{-1}(\vec{B}_1-\vec{B}_2)\cdot\hat{n}+\hat{n}\cdot\vec{M}_2 \qquad (11)$$

'Αλλά ἰσχύει ἡ ὁριακή συνθήκη :

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \qquad (12)$$

"Ωστε:

$$\boxed{\hat{n}\cdot(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\hat{n}\cdot\vec{M}_2} \qquad (13)$$

γ. 'Η (1) ἐκφράζει ὅτι ἡ ἀσυνέχεια, πού ἐμφανίζεται στήν κάθετη συνιστώσα τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\vec{E}$ ὀφείλεταιστήν ἠλεκτρική πόλωση τοῦ διηλεκτρικοῦ.

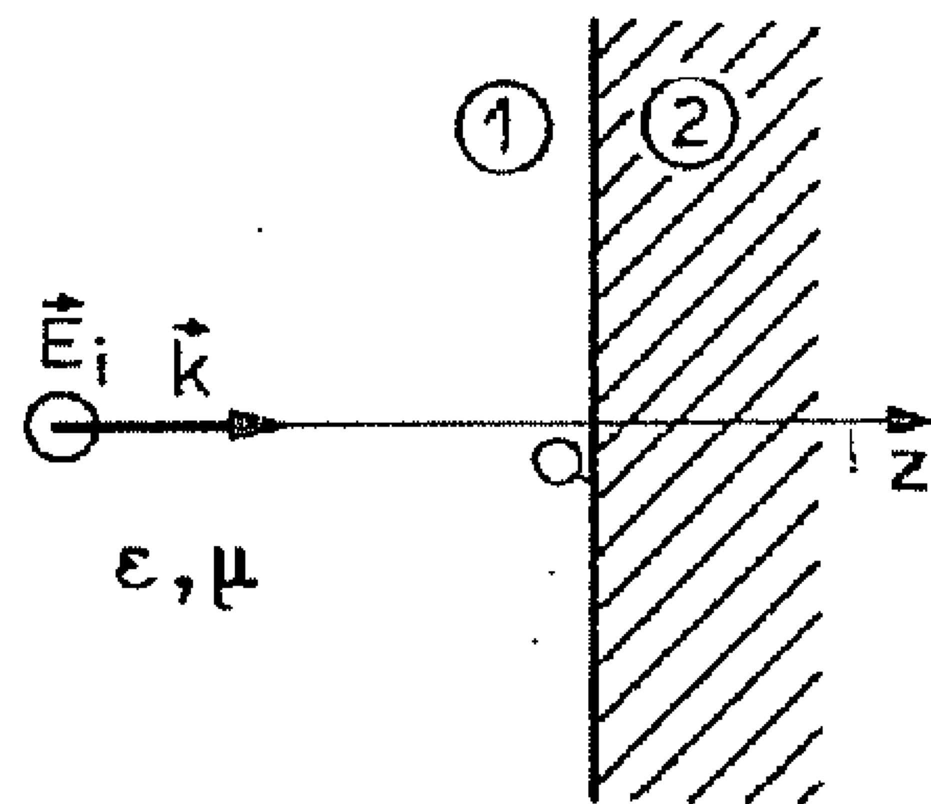
'Η (2) ἐκφράζει ὅτι ἡ ἀσυνέχεια, πού ἐμφανίζεται στήν κάθετη συνιστώσα τῆς μαγνητικῆς διέγερσης $\vec{H}$, ὀφείλεται στή μαγνητική πόλωση τοῦ διηλεκτρικοῦ.

'Επομένως,ἄν οἱ ἀντίστοιχες πολώσεις εἶναι μηδέν δέν ὑπάρχει ἀσυνέχεια .

4.2 Έστω τό έπίπεδο κύμα

$$\vec{\mathcal{E}}_i = E_o \hat{x} e^{-jkz} \qquad (1)$$

πού προσπίπτει κάθετα πάνω σέ μιά τέλεια άγώγιμη έπιφάνεια (z=0 βλ. σχήμα).



α. Νά προσδιορίσετε τό μαγνητικό πεδίο $\vec{\mathcal{B}}_i$ τοῦ κύματος (1).

β. Έφαρμόζοντας τήν κατάλληλη συνθήκη στήν έπιφάνεια z = 0, νά προσδιορίσετε τό άνακλώμενο ήλεκτρομαγνητικό κύμα ($\vec{\mathcal{E}}_r$, $\vec{\mathcal{B}}_r$) .

γ. Νά προσδιορίσετε τήν έπιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{\mathcal{J}}_S$ πού έπάγεται πάνω στήν έντελῶς άγώγιμη έπιφάνεια.

δ. Νά προσδιορίσετε τά μιγαδικά διανύσματα Poynting $\vec{\mathcal{P}}_i$ καί $\vec{\mathcal{P}}_r$ καί τίς άντίστοιχες τιμές τῆς μέσης άκτινοβολούμενης ίσχύος άνά μονάδα έπιφάνειας.

ε. Νά άποδείξετε ὅτι στό χῶρο (1) θά άποκατασταθεῖ ἕνα στάσιμο κύμα καί νά προσδιορίσετε τά χαρακτηριστικά του (πλάτος, θέσεις μεγίστων-έλαχίστων).

Λ ύ σ η

α. Άπό τήν $2^{\underline{\eta}}$ έξίσωση τοῦ Maxwell ἕχουμε :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}_i = -j\omega \vec{\mathcal{B}}_i \qquad (2)$$

ἤ $$\vec{\mathcal{B}}_i = \frac{j}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}_i = \frac{j}{\omega} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_o e^{-jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega} [-\hat{y}(jkE_o e^{-jkz})] =$$

$$= \frac{k}{\omega} E_o e^{-jkz} \hat{y} = \frac{1}{\upsilon} E_o e^{-jkz} \hat{y} = \sqrt{\varepsilon\mu}\, E_o e^{-jkz} \hat{y}$$

Ὥστε :

$$\boxed{\vec{B}_i = \sqrt{\varepsilon\mu}\, E_o \hat{y} e^{-jkz}} \qquad (3)$$

β. Οἱ ὁριακές συνθῆκες γιά τό $\vec{E}$ πάνω στήν ἐπιφάνεια εἶναι:

$$\hat{z}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_S \qquad (4)$$

ἤ

$$\hat{z}\cdot(\varepsilon_2\vec{E}_2 - \varepsilon_1\vec{E}_1) = \rho_S \qquad (5)$$

καί

$$\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = 0 \qquad (6)$$

Ἐπειδή στό μέσο (2) εἶναι $\vec{E}_2 = 0$ καί ἑπομένως $\vec{E}_{2t}=0$ καί ἐπειδή εἶναι καί $\rho_S = 0$, οἱ (5) καί(6)γίνονται:

$$\vec{E}_1\Big|_{z=0} = 0 \qquad (7)$$

Ἀλλά στό χῶρο (1) εἶναι:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r \qquad (8)$$

Ἀπό τίς (7) καί (8) , γιά z = 0 , ἔχουμε :

$$0 = \vec{E}_i(o) + \vec{E}_r(o) \qquad (9)$$

καί ἀπό τήν (1) προκύπτει:

$$\vec{E}_r(o) = -\vec{E}_i(o) = -\vec{E}_o\hat{x} \qquad (10)$$

Τό $\vec{E}_r$ εἶναι ἐπίπεδο κύμα, πού διαδίδεται κατά τή διεύθυνση $-\hat{z}$ καί εἶναι πολωμένο κατά τή διεύθυνση $\hat{x}$

$$\vec{E}_r = E_{or} e^{jkz}\hat{x} \qquad (11)$$

Ἀπό τίς (10), (11) προκύπτει:

$$E_{or} = -E_o = E_o e^{j\pi} \qquad (12)$$

Ὥστε :

$$\boxed{\vec{E}_r = -E_o\hat{x}e^{jkz} = E_o\hat{x}e^{j(kz+\pi)}} \qquad (13)$$

καί

$$\vec{E}_1 = E_o e^{-jkz}\hat{x} - E_o e^{jkz}\hat{x} \qquad (14)$$

Προκειμένου γιά τό μαγνητικό πεδίο έχουμε :

$$\mathcal{B}_r = \frac{j}{\omega}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -E_o e^{jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega}[-\hat{y}(jkE_o e^{jkz})] = \frac{k}{\omega}E_o e^{jkz}\hat{y} =$$

$$= \frac{1}{\upsilon}E_o e^{jkz}\hat{y} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,E_o\hat{y}e^{jkz}$$

Ώστε $$\boxed{\mathcal{B}_r = \sqrt{\varepsilon\mu}\,E_o\,\hat{y}e^{jkz}} \tag{15}$$

παρατηρούμε ότι ενώ τό $\mathcal{E}$ κατά τήν ανάκλαση αλλάζη κατά 180^o τή φάση του τό $\mathcal{B}$ δέν παθαίνει καμιά αλλαγή φάσης.

γ. Η οριακή συνθήκη γιά τήν εφαπτομενική συνιστώσα τής μαγνητικής διέγερσης $\mathcal{H}$, πάνω στήν επιφάνεια z = 0, είναι:

$$\hat{z}\times(\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1) = \mathcal{J}_s \tag{16}$$

Αλλά είναι: $$\mathcal{H}_2 = 0 \tag{17}$$

Ώστε : $$\mathcal{H}_1\times\hat{z}\Big|_{z=0} = \mathcal{J}_s \tag{18}$$

Αλλά $$\mathcal{H}_1\Big|_{z=0} = \mathcal{H}_i + \mathcal{H}_r\Big|_{z=0} = \frac{\mathcal{B}_i + \mathcal{B}_r}{\mu}\Big|_{z=0} \tag{19}$$

Από τίς (3), (15), (18) καί (19) έχουμε :

$$\mathcal{J}_s = \left[\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\,E_o\,\hat{y}(e^{-jkz}+e^{jkz})}{\mu}\right]_{z=0}\times\hat{z} = \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_o\,\hat{y}\right]\times\hat{z} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_o(\hat{y}\times\hat{z}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_o\hat{x}$$

Ώστε: $$\mathcal{J}_s = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_o\hat{x} = \frac{E_o}{Z}\,\hat{x} \tag{20}$$

όπου: $$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{21}$$

η κυματική αντίσταση τού μέσου (ε,μ) .

Δηλαδή η πραγματική πυκνότητα ρεύματος είναι:

$$\vec{J}_s = \frac{E_o}{Z} \cos\omega t\, \hat{x} \quad (22)$$

καί έχει τή διεύθυνση τῆς πόλωσης ($\hat{x}$) τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

δ. Τό $\vec{\mathcal{P}}$ γενικά ὁρίζεται :

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^* = \frac{1}{\mu} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{B}}^* \quad (23)$$

'Από τίς (1) καί (3) προκύπτει :

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}}_i = \frac{1}{\mu}\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_o^2\, \hat{x}\times\hat{y} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_o^2\, \hat{z}} \quad (24)$$

'Αντίστοιχα, ἀπό τίς (13) καί (15) προκύπτει:

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}}_r = -\frac{1}{\mu}\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_o^2\, \hat{x}\times\hat{y} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_o^2\, \hat{z}} \quad (25)$$

"Ωστε $$\vec{\mathcal{P}}_r = -\vec{\mathcal{P}}_i \quad (26)$$

Οἱ ζητούμενες τιμές ἰσχύος εἶναι , ἀντίστοιχα ,:

$$\bar{P}_i = \left|\bar{\vec{P}}_i\right| = \left|\frac{1}{2} Re\, \vec{\mathcal{P}}_i\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_o^2 \quad (27)$$

$$\bar{P}_r = \left|\bar{\vec{P}}_r\right| = \left|\frac{1}{2} Re\, \vec{\mathcal{P}}_r\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_o^2 \quad (28)$$

Δηλαδή κατά τήν κάθετη πρόσπτωση ἐπίπεδου ΗΜ κύματος πάνω σέ ἐντελῶς ἀγώγιμη ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, ὅση ἰσχύς προσπίπτει τόση καί ἀνακλᾶται χωρίς καμιά ἀπώλεια .

ε. Σέ κάθε σημεῖο μπροστά ἀπό τήν ἀγώγιμη ἐπιφάνεια $z = 0$ δέν ἔχουμε σ υ ν ο λ ι κ ά συνεχή ροή ἰσχύος οὔτε πρός τήν $\hat{z}$ οὔτε πρός τήν $-\hat{z}$ διεύθυνση, πράγμα πού σημαίνει ὅτι δέν ἔχουμε συνολικό τρέχον κύμα. Πράγματι, αὐτό προκύπτει καί ἀπό τή (14) :

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = E_o\, \hat{x}(e^{-jkz} - e^{jkz}) = -2jE_o \sin kz \cdot \hat{x} \quad (29)$$

από όπου προκύπτει ότι τό πραγματικό πεδίο $\vec{E}_1$ είναι

$$\vec{E}_1 = Re(\vec{\mathcal{E}}_1 e^{j\omega t}) = 2E_o \hat{x} \sin kz \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \qquad (30)$$

Ἡ (30) παριστάνει σ τ ά σ ι μ ο κ ύ μ α μέ πλάτος $2E_o$ sinkz , πού αὐξομειώνεται ἡμιτονικά πάνω στόν ἄξονα τῶν z , μεταξύ τῆς τιμῆς 0, πού παίρνει στά σημεῖα ὅπου

$$k|z| = m\pi \qquad (31)$$

ἤ

$$|z| = m\frac{\lambda}{2} \qquad (m=0,1,2,\ldots) \quad (32)$$

καί τῆς τιμῆς $2E_o$, πού παίρνει στά σημεῖα ὅπου :

$$k|z| = n\frac{\pi}{2} \qquad (n=1,3,5,\ldots) \quad (33)$$

ἤ

$$|z| = n\frac{\lambda}{4} \qquad (n=1,3,5,\ldots) \quad (34)$$

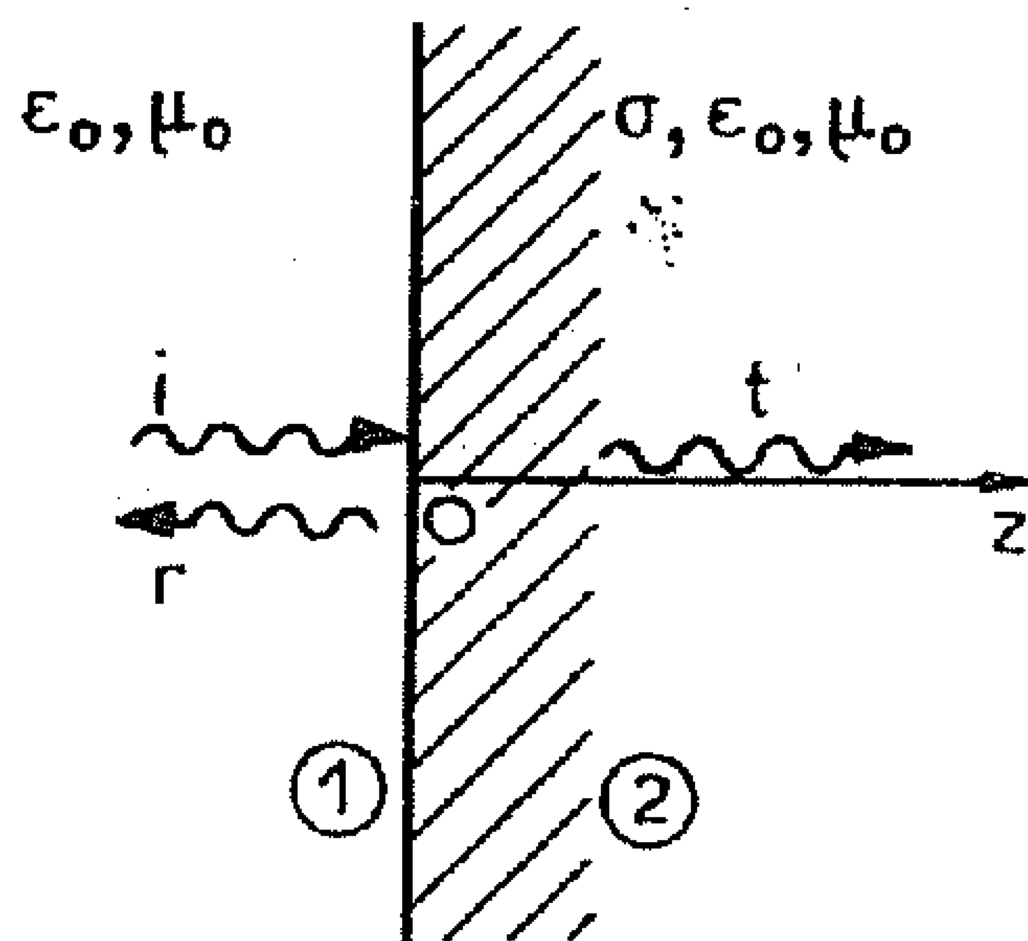
Π α ρ α τ ή ρ η σ η : Στίς ὑψηλές συχνότητες κι ἕνας πραγματικός ἀγωγός συμπεριφέρεται περίπου σάν τέλειος ἀγωγός. Τότε τό ἐπιφανειακό ρεῦμα $\vec{J}_S$, στήν πράξη, περνᾶ ἀπό ἕνα λεπτό στρῶμα μέ πάχος x_o ἴσο μέ τό βάθος διείσδυσης, ἡ ἀντίσταση τοῦ ὁποίου προκαλεῖ ἀπώλεια ἰσχύος (βλ. παρακάτω πρόβλημα 4-4) .

4.3 Μελέτη κάθετης πρόσπτωσης κύματος σέ ἐπίπεδη ἐπιφάνεια πραγματικοῦ ἀγωγοῦ (μέ ἀπώλειες) .

Ἔστω τό ἐπίπεδο κύμα

$$\vec{\mathcal{E}}_i = \mathcal{E}_{io} e^{-jk_o z} \hat{x} \qquad (1)$$

πού πέφτει κάθετα στήν ἐπίπεδη ἐπιφάνεια z = 0 (βλ. σχῆμα) ἑνός πραγματικοῦ ἀγωγοῦ. Ἕνα μέρος ἀπό τό κύμα αὐτό περνᾶ μέσα στόν ἀγωγό :



$$\vec{\mathcal{E}}_t = \mathcal{E}_{to} e^{-\gamma z} \hat{x} \qquad (2)$$

ὅπου : $$\gamma = \sqrt{j\omega\mu_o\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

ἡ σταθερά μεταδόσεως μέσα στόν ἀγωγό, ἐνῶ ἕνα ἄλλο μέρος του ἀνακλᾶται καί ἐπιστρέφει μέσα στό ὑλικό (1) :

$$\vec{\mathcal{E}}_r = \mathcal{E}_{ro} e^{jk_o z}\hat{x} \tag{3}$$

α. Ἄν Z_o καί Z_c εἶναι οἱ κυματικές ἀντιστάσεις τοῦ ὑλικοῦ (1) καί τοῦ ὑλικοῦ (2)(βλ. προβλ. 3.14) νά προσδιοριστοῦν τά πεδία $\vec{\mathcal{H}}_i$, $\vec{\mathcal{H}}_t$ καί $\vec{\mathcal{H}}_r$ πού ἀντιστοιχοῦν στά πεδία τῶν (1) , (2) καί (3) .

β. Ἐφαρμόζοντας τίς κατάλληλες ὁριακές συνθῆκες νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ὁ " συντελεστής ἀνακλάσεως " ρ πού ὁρίζεται ἀπό τή σχέση $\mathcal{E}_{ro} = \rho\mathcal{E}_{io}$, καί ὁ " συντελεστής μεταδόσεως" τ , πού ὁρίζεται ἀπό τή σχέση $\mathcal{E}_{to}=\tau\mathcal{E}_{io}$ μποροῦν νά προσδιοριστοῦν ἀπό τίς σχέσεις :

$$\rho = \frac{Z_c - Z_o}{Z_c + Z_o} \qquad \tau = \frac{2Z_c}{Z_c + Z_o} \tag{4}$$

γ. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τό μέσο διάνυσμα Poynting ($\bar{\vec{P}}_t$) μόλις μέσα στήν ἀγώγιμη ἐπιφάνεια z = 0 , τοῦ ὁποίου τό μέτρο ἐκφράζει τήν ἰσχύ ἀνά μονάδα, ἐπιφάνειας, πού εἰσχωρεῖ καί χάνεται μέσα στόν ἀγωγό εἶναι:

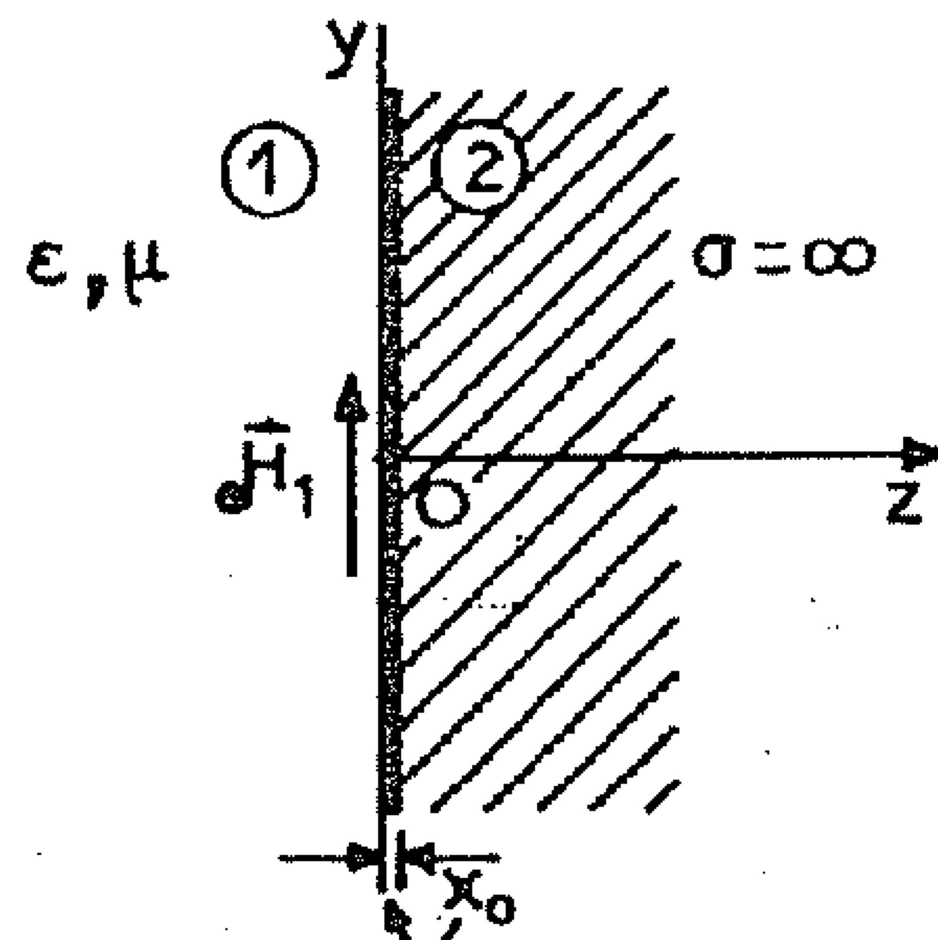
$$\bar{\vec{P}}_t = \frac{1}{2}\left|\tau\,\mathcal{E}_{io}\right|^2 \mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z_c}\right)\hat{z} = \frac{1}{2}\left|\mathcal{H}_{10}\right|^2 \mathrm{Re}\,Z_c\,\hat{z} \tag{5}$$

ὅπου $\mathcal{H}_{10} = \mathcal{H}_{io} + \mathcal{H}_{ro} = \mathcal{H}_{to}$ εἶναι ὁ phasor τοῦ συνολικοῦ πεδίου $\vec{\mathcal{H}}_1$ μέσα στό ὑλικό (1) καί μπροστά ἀκριβῶς στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἀγωγοῦ καί ὁ ὁποῖος στήν πράξη (γιά $\sigma \gg \omega\varepsilon$) μπορεῖ νά ληφθεῖ $H_{10} = 2H_{io}$.

4.4 Έστω ότι μπροστά στήν επίπεδη επιφάνεια (z=0) ενός πραγματικού αγωγού (βλ. σχ. 1) υπάρχει τό εφαπτομενικό πεδίο

$$\vec{H}_1 = Re(\vec{\mathcal{H}}_{10} e^{j\omega t})\hat{y} \qquad (1)$$

Άν ή συχνότητα είναι υψηλή μπορεί κανένας νά θεωρήσει ότι ή επίδραση τοῦ πεδίου μέσα στόν αγωγό εκτείνεται μόνο σέ ένα λεπτό επιφανειακό στρῶμα μέ πάχος ίσο μέ τό βάθος διείσδυσης x_o καί ότι ό υπόλοιπος αγωγός συμπεριφέρεται σάν τέλειος αγωγός. Ώστε μέσα από τό επιφανειακό αυτό στρῶμα περνᾶ τό επαγόμενο ρεῦμα μέ επιφανειακή πυκνότητα $\vec{J}_s$.

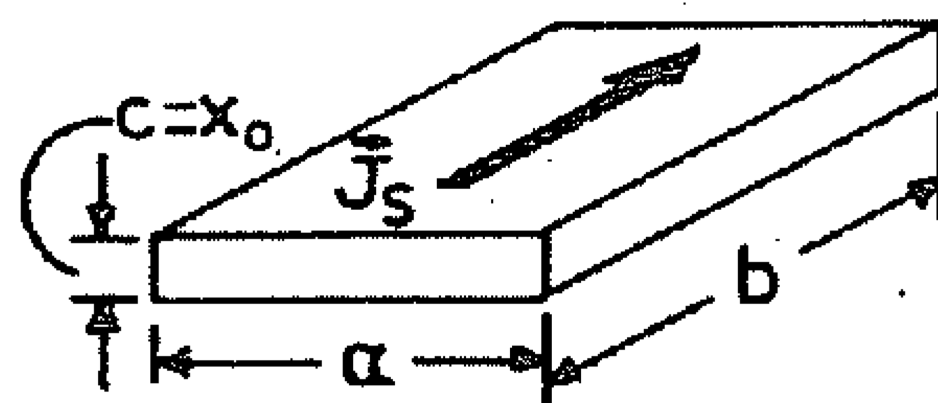


Σχ. 1

α. Μέ τήν παραπάνω θεώρηση νά αποδειχτεῖ ότι ή οριακή συνθήκη τῆς μαγνητικῆς διέγερσης παίρνει τή μορφή :

$$\vec{\mathcal{J}}_{So} = -\hat{z}\times\vec{\mathcal{H}}_{10} = \mathcal{H}_{10}\hat{x} \qquad (2)$$

β. Θεωρώντας μιά επιφανειακή πλάκα τοῦ αγώγιμου υλικοῦ (βλ. σχ. 2) διαστάσεων a x b x c (όπου $c=x_o$) νά αποδειχτεῖ ότι ή απώλεια ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας τοῦ αγωγοῦ μπορεῖ νά υπολογιστεῖ μέ τή σχέση :



Σχ. 2

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\left|\mathcal{H}_{10}\right|^2 R_S = \frac{1}{2}\left|\mathcal{H}_{10}\right|^2 Re Z_c \qquad (3)$$

όπου R_s ή επιδερμική αντίσταση καί Z_c ή κυματική αντίσταση τοῦ αγώγιμου υλικοῦ (βλ. προβλ. 3.14)

γ. Νά παραβληθεῖ ή (3) μέ τήν (5) τοῦ προβλ. 4.3 .

4.5 Έστω ένας αγώγιμος ημιχώρος $x < 0$ (βλ. σχήμα), μέσα στόν οποίο υπάρχει ένα εναλλασσόμενο ρεύμα αγωγής πού έχει πυκνότητα :

$$\vec{J} = J_o \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi)} \qquad (1)$$

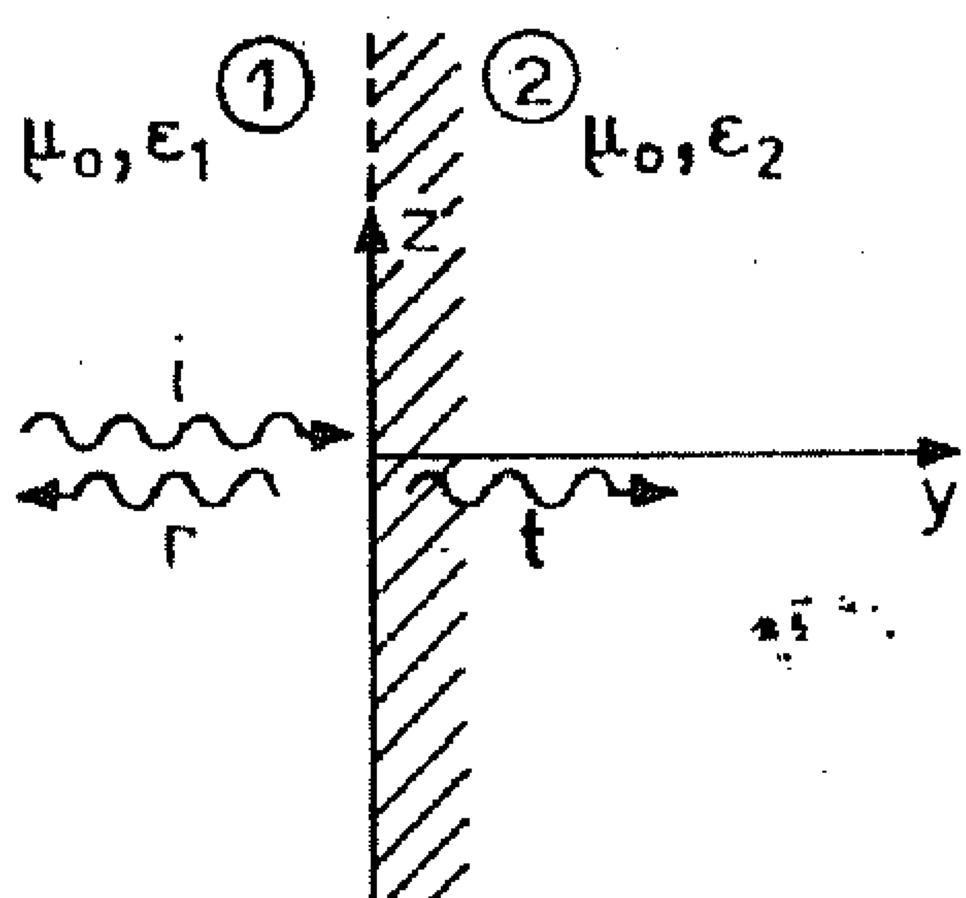
καί σταματᾶ στήν επιφάνεια $x = 0$. Νά προσδιοριστεῖ ή ένταση $\vec{E}$ τοῦ ήλεκτρικοῦ πεδίου στόν ήμιχῶρο $x > 0$ μέ δύο τρόπους . Δηλαδή:

α. Προσδιορίζοντας πρῶτα, από τήν εξίσωση τῆς συνέχειας καί τό νόμο τοῦ Gauss τήν επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ρ_S πάνω στήν επιφάνεια $x = 0$ καί εφαρμόζοντας τήν κατάλληλη οριακή συνθήκη καί .

β. Έξισώνοντας τό ρεῦμα αγωγῆς τοῦ ήμιχώρου $x < 0$ μέ τό ρεῦμα μετατόπισης τοῦ ήμιχώρου $x > 0$.

('Απ. α καί β : $\vec{E} = \frac{J_o \hat{x}}{\omega \varepsilon_o} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$)

4.6 Τό επίπεδο xz εἶναι ή διαχωριστική επιφάνεια δύο τέλειων διηλεκτρικῶν ὑλικῶν μέ μαγνητική διαπερατότητα μ_o καί διηλεκτρικές σταθερές ε_1 , ε_2 , αντίστοιχα (βλ. σχῆμα) .



Πάνω στήν οριακή επιφάνεια πέφτει κάθετα από τήν πλευρά τοῦ ὑλικοῦ (1) τό κύμα :

$$\vec{\mathcal{E}}_i(y,t) = \mathcal{E}_{io} \hat{x} e^{j(\omega t - k_1 y)} \qquad (1)$$

όπου $$k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_o} \qquad (2)$$

καί ένα μέρος απ' αυτό ($\vec{\mathcal{E}}_t$) περνᾶ στό ὑλικό (2), ενῶ ένα άλλο μέρος ($\vec{\mathcal{E}}_r$)

ἀνακλᾶται.

α. Νά προσδιορίσετε τά φασικά διανύσματα (Phasors) $\vec{\mathcal{E}}_i$ καί $\vec{\mathcal{B}}_i$ τοῦ κύματος (1)

β. Ἄν $\mathcal{E}_{io}$, $\mathcal{E}_{ro}$, καί $\mathcal{E}_{to}$ εἶναι οἱ τιμές τῶν phasors τῶν τριῶν κυμάτων στό ἐπίπεδο y = 0 ,νά προσδιορίσετε τούς λόγους $\rho = (\mathcal{E}_{ro}/\mathcal{E}_{io})$ καί $\tau = (\mathcal{E}_{to}/\mathcal{E}_{io})$ σέ συνάρτηση μέ τά ε_1 καί ε_2 (ρ εἶναι ὁ συντελεστής ἀνακλάσεως ἐνῶ τ ὁ συντελεστής μεταδόσεως) .

γ. Νά ὑπολογίσετε τί ποσοστό τῆς ἰσχύος τοῦ κύματος (1) περνᾶ στό μέσο (2) καί τί ποσοστό ἀνακλᾶται στήν ὁριακή ἐπιφάνεια καί ξαναγυρίζει στό μέσο (1). (Θέμα ἐξετάσεων Ὀκτωβρίου 1977) .

(Ἀπ. α. $\vec{\mathcal{E}}_i = \mathcal{E}_{io} e^{-jk_1 y}\hat{x}$, $\vec{\mathcal{B}}_i = -\frac{1}{\omega} k_1 \mathcal{E}_{io} e^{-jk_1 y}\hat{z}$

β. $\rho = \left(1-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) \Big/ \left(1+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)$

$\tau = 2 \Big/ \left(1+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)$

γ. $\bar{P}_t / \bar{P}_i = \tau^2$, $\bar{P}_r / \bar{P}_i = \rho^2$) $\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cdot\tau$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1 Στήν πράξη, οἱ κατασκευαστές κυματοδηγῶν τηροῦν συνήθως τήν ἀκόλουθη σχέση μεταξύ τῶν ἐσωτερικῶν ἐγκαρσίων διαστάσεων ἑνός ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ:

$$w = 2d \qquad (1)$$

Ὑποθέτοντας ὅτι τηρεῖται ἡ σχέση αὐτή:

α. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι στόν ὀρθογώνιο κυματοδηγό ὁ κυματικός τύπος TE_{10} ἔχει τό μεγαλύτερο ὁριακό μῆκος κύματος ἀπό ὅλους τούς ἄλλους τύπους TE_{mn} καί ἀκολουθοῦν οἱ

κυματικοί τύποι TE_{01} καί TE_{20} καί στή συνέχεια ὅλοι οἱ ἄλλοι τύποι.

β. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ περιοχή τιμῶν τῶν διαστάσεων w καί d τοῦ κυματοδηγοῦ, πού μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε γιά νά κυματοδηγήσουμε τόν κυματικό τύπο TE_{10} στή συχνότητα f_o = 6 GHz καί μιά περιοχή της ± 20% πάνω καί κάτω ἀπ' αὐτήν (τό διηλεκτρικό τοῦ κυματοδηγοῦ εἶναι ἀέρας).

Λ ύ σ η

α. Ἐφαρμόζοντας τήν (1) στή γνωστή σχέση:

$$\frac{1}{\lambda_{mn,op}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^2}{w^2} + \frac{n^2}{d^2}} \qquad (2)$$

ἔχουμε:

$$\lambda_{mn,op} = \frac{w}{\sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2}} \qquad (3)$$

Μελετώντας τήν (3) συμπεραίνουμε ὅτι τό μεγαλύτερο ὁρικό μῆκος κύματος τό ἔχει ὁ κυματικός τύπος TE_{10} καί ἀκολουθοῦν ἀμέσως οἱ TE_{01} καί TE_{20} :

$$\lambda_{10,op} = 2w \qquad (4)$$

$$\lambda_{01,op} = \lambda_{20,op} = w \qquad (5)$$

Ὅλοι οἱ ἄλλοι τύποι ἔχουν μικρότερο λ_{op} .

β. Γιά νά διαδίδεται ἕνα μῆκος κύματος λ μέσα στόν κυματοδηγό πρέπει νά εἶναι $\lambda < \lambda_{op}$, ἐνῶ γιά νά μή διαδίδεται πρέπει νά εἶναι $\lambda > \lambda_{op}$.

Ἀπό τά ἀποτελέσματα τοῦ προηγούμενου ἐρωτήματος, προκύπτει ὅτι γιά νά διαδίδεται στόν κυματοδηγό μόνο ὁ κυματικός τύπος TE_{10} καί κανένας ἄλλος ,

πρέπει καί άρκεῖ νά εἶναι :

$$\lambda_{01,op} < \lambda < \lambda_{10,op} \qquad (6)$$

ἤ

$$w < \lambda < 2w \qquad (7)$$

'Η (7) μπορεῖ νά γραφεῖ καί ἔτσι:

$$\frac{\lambda}{2} < w < \lambda \qquad (8)$$

Ἄν ἀντί γιά τό λ χρησιμοποιήσουμε τή συχνότητα f ἡ (8) γίνεται:

$$\frac{c}{2f} < w < \frac{c}{f} \qquad (9)$$

Οἱ συχνότητες πού θέλουμε νά περνοῦν μέσα ἀπό τόν κυματοδηγό εἶναι ἀπό

$f_1 = 0,8\ f_o = 4,8$ GHz ἕως $f_2 = 1,2\ f_o = 7,2$ GHz .

'Η (9) πρέπει νά ἰσχύει γιά ὅλες τίς συχνότητες μεταξύ τῶν f_1 καί f_2 . 'Αρκεῖ νά εἶναι λοιπόν :

$$\frac{c}{2f_1} < w < \frac{c}{f_2} \qquad (10)$$

'Αντικαθιστώντας τά f_1 , f_2 καί c στή (10) ἔχουμε:

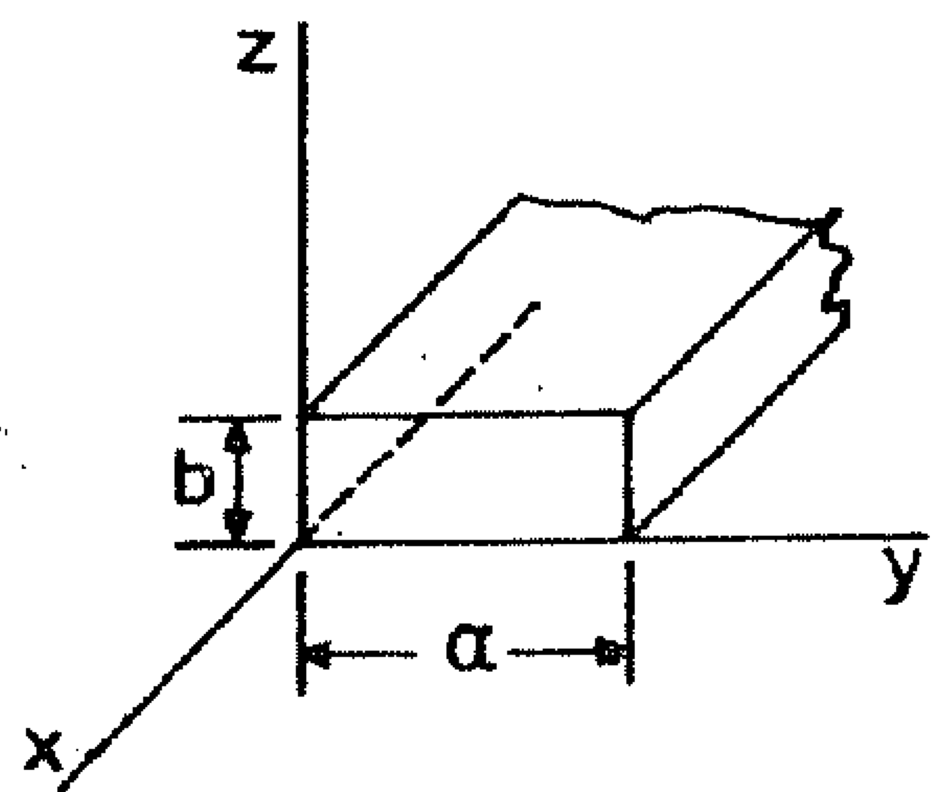
$$3,12\,\text{cm} < w < 4,17\,\text{cm} \qquad (11)$$

'Η (11) μαζί μέ τήν (1) δίνουν ὅλες τίς δυνατές τιμές w καί d πού μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε. Π.χ. μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε w = 3,5 cm καί d = 1,75 cm ἤ w = 4cm καί d = 2 cm .

5.2 Οἱ ἐσωτερικές ἐγκάρσιες διαστάσεις ἑνός ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ εἶναι α καί b (βλ. σχῆμα) . 'Ο κυματικός τύπος, πού μεταδίδει ὁ κυματοδηγός ἔχει ἠλεκτρικές προβολές:

$$\mathcal{E}_y = A \sin \frac{\pi z}{b}\, e^{j(\omega t - \beta x)} \qquad (1)$$

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_z = 0 \qquad (2)$$



α. Ποιός κυματικός τύπος εἶναι αὐτός;

β. Νά προσδιοριστοῦν οἱ ὑπόλοιπες προβολές του$(\mathcal{H}_x,\mathcal{H}_y,\mathcal{H}_z)$.

γ. Νά δοθεῖ ἡ γραφική παράσταση $\beta^2 = f(\frac{1}{b^2})$.

Δίνονται τά ε,μ,ω,α,b,A .

Λ ύ σ η

α.'Αφοῦ $\mathcal{E}_x = 0$ πρόκειται γιά τύπο TE_{mn} .Κατά τόν ἄξονα y δέν ἔχουμε διακύμανση τοῦ πεδίου, ἄρα m=0.

Κατά τόν ἄξονα z ἔχουμε μισή ἡμιτονοειδή διακύμανση (τό πηλίκο $\frac{\pi z}{b}$ μεταβάλλεται ἀπό 0 ἕως π), ἄρα n=1 .

Πρόκειται λοιπόν γιά τόν κυματικό τύπο $TE_{01}(H_{01})$

β.'Από τή θεωρία (σχέσεις (5-57)) ἔχουμε γιά τήν $\mathcal{E}_y$ γενικά:

$$\mathcal{E}_y = \frac{j\omega\mu\, n\pi}{k_c^2 b}\mathcal{H}_o \cos\frac{m\pi y}{\alpha}\sin\frac{n\pi z}{b}e^{j(\omega t-\beta x)} \quad (3)$$

πού γιά m = 0 καί n=1 γίνεται:

$$\mathcal{E}_y = \frac{j\omega\mu\pi}{k_c^2 b}\mathcal{H}_o \sin\frac{\pi z}{b}\, e^{j(\omega t-\beta x)} \quad (4)$$

Ταυτίζοντας τήν (1) μέ τήν (4) ἔχουμε :

$$A = \frac{j\omega\mu\pi\mathcal{H}_o}{k_c^2 b} \quad (5)$$

ἤ

$$\mathcal{H}_o = \frac{k_c^2 b\, A}{j\omega\mu\pi} \quad (6)$$

'Από τή θεωρία,ἐπίσης,ξέρουμε ὅτι οἱ προβολές τοῦ $\vec{\mathcal{H}}$ εἶναι (γιά m = 0 , n = 1) :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}_x &= \mathcal{H}_o \cos\frac{\pi z}{b}\, e^{j(\omega t-\beta x)} \\ \mathcal{H}_y &= 0 \\ \mathcal{H}_z &= \frac{j\beta\pi}{k_c^2 b}\,\mathcal{H}_o \sin\frac{\pi z}{b}\, e^{j(\omega t-\beta x)} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Χρησιμοποιώντας τήν (6) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}_x &= \frac{k_c^2\, b\, A}{j\omega\mu\pi} \cos\frac{\pi z}{b}\, e^{j(\omega t-\beta x)} \\ \mathcal{H}_z &= \frac{j\beta\pi}{k_c^2 b}\,\frac{k_c^2\, b\, A}{j\omega\mu\pi} \sin\frac{\pi z}{b}\, e^{j(\omega t-\beta x)} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

'Αλλά

$$k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \qquad (9) \qquad \text{καί}$$

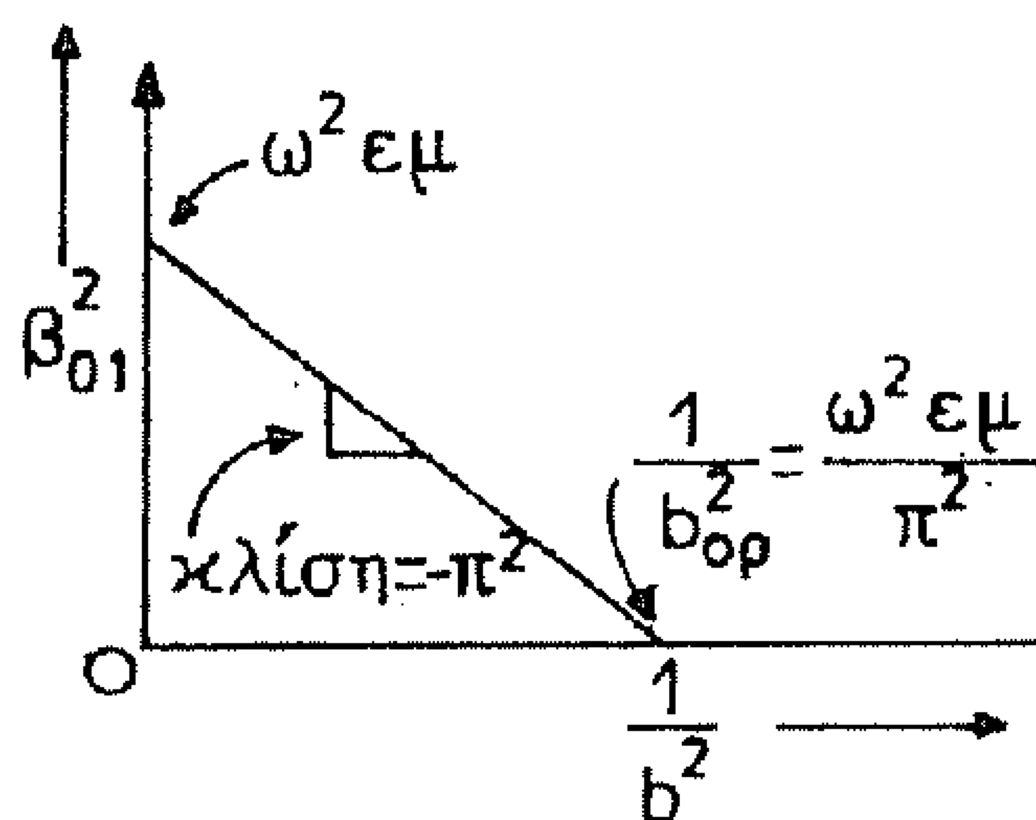
$$\beta \equiv \beta_{01} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\upsilon^2} - \frac{\pi^2}{b^2}} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{b^2}} \qquad (10)$$

Ώστε, τελικά:

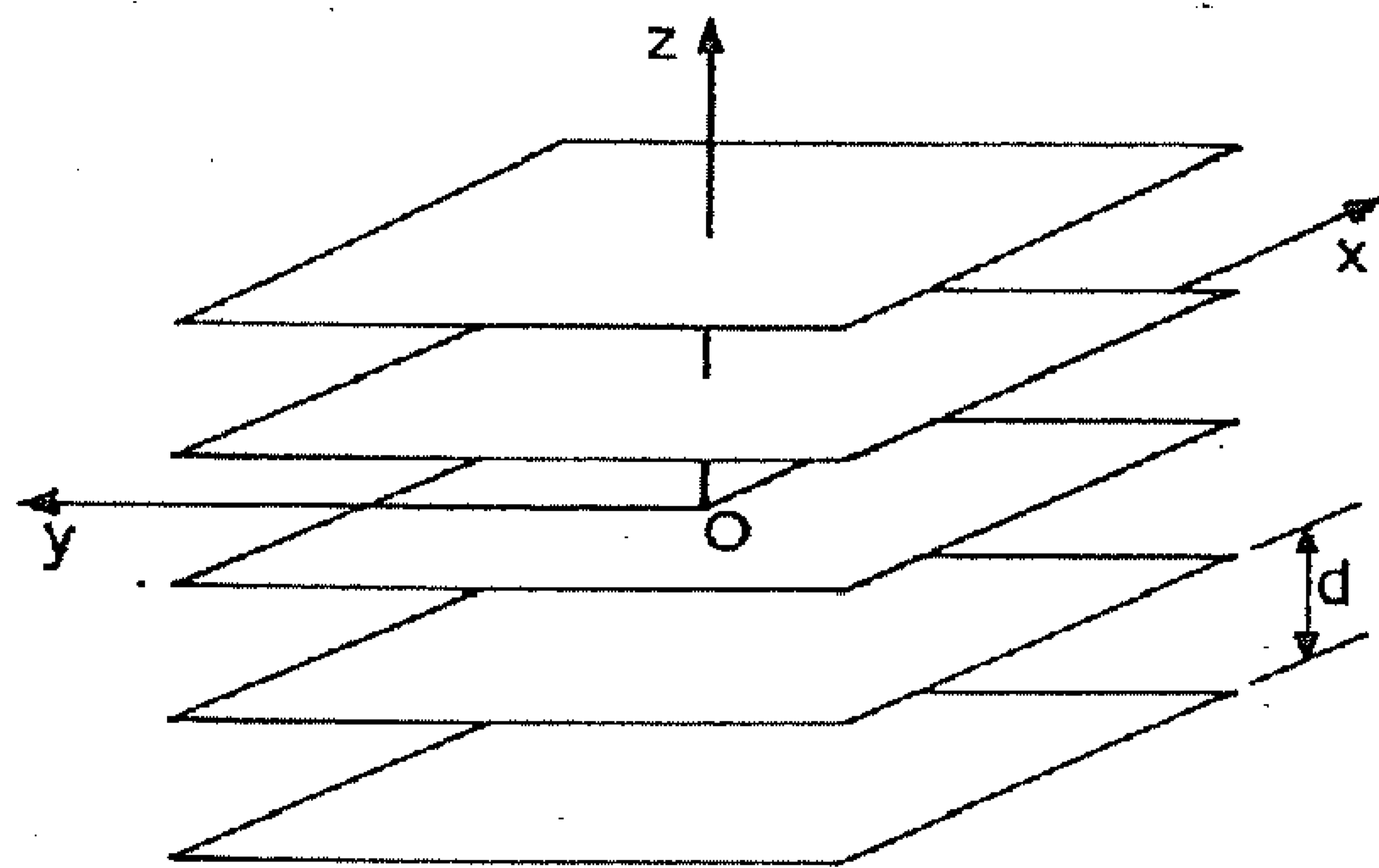
$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H}_x &= \frac{\pi A}{j\omega\mu b} \cos\frac{\pi z}{b}\, e^{j(\omega t-\beta x)} \\ \mathcal{H}_y &= 0 \\ \mathcal{H}_z &= \frac{A}{\omega\mu} \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{b^2}} \sin\frac{\pi z}{b}\, e^{j(\omega t-\beta x)} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

γ. 'Από τή (10) έχουμε :

$$\beta^2 \equiv \beta_{01}^2 = \omega^2 \varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{b^2} \qquad (12)$$



5.3 Ἔστω μιά σειρά ἀπό ἀγώγιμα ἐπίπεδα παράλληλα πρός τό ἐπίπεδο xy, πού ἀπέχουν τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο ἀπόσταση d.(βλ. σχ. 1). Νά ἀποδείξετε ὅτι ἕνα TEM κύμα,πού διαδίδεται κατά τόν ἄξονα x καί φτάνει στά ἐπίπεδα, περνᾶ ἐλεύθερα μέσα τους ἄν τό ἠλεκτρικό του πεδίο εἶναι κάθετο στά ἐπίπεδα. Ἄν, ὅμως, τό ἠλεκτρικό πεδίο τοῦ κύματος εἶναι παράλληλο μέ τά ἐπίπεδα, τότε γιά νά περάσει πρέπει νά εἶναι $d > \lambda/2$.

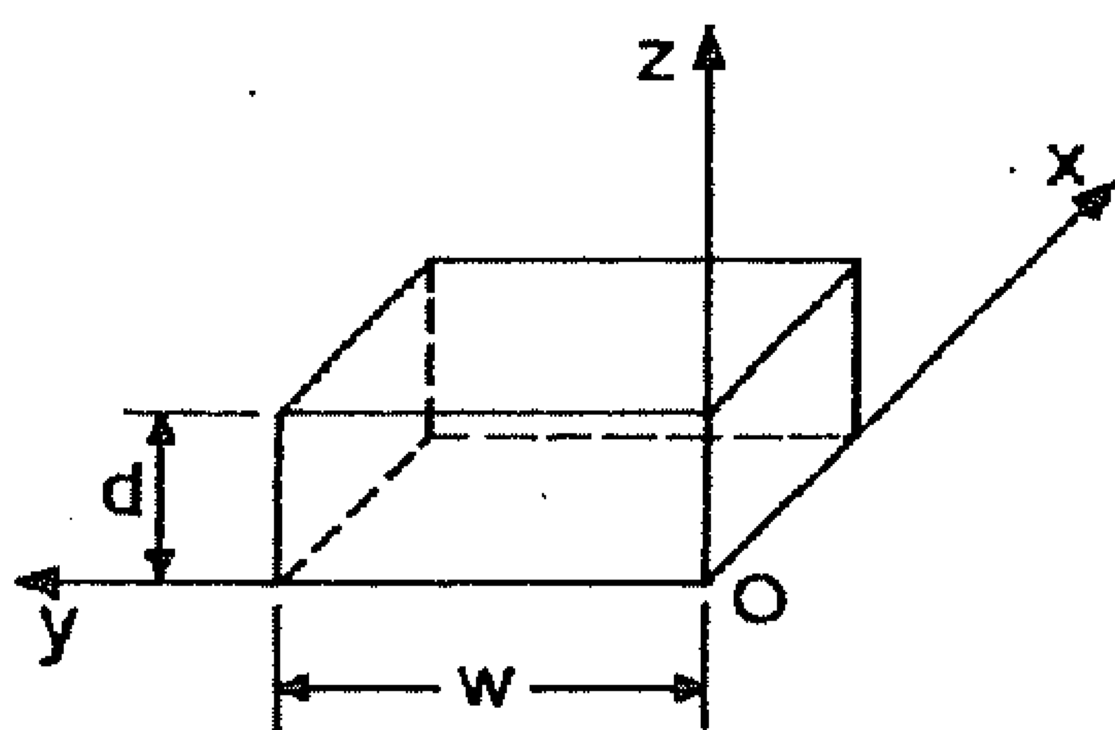


Σχ. 1

(Ὑπόδειξη : Ἀνά δύο τά ἐπίπεδα νά θεωρηθοῦν σάν όριακή περίπτωση ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ, πού ἡ μία ἐγκάρσια διάστασή του (w) τείνει στό ἄπειρο).

Λ ύ σ η

α. Ἄν $w \to \infty$ ὁ κυματοδηγός τοῦ σχ. 2 τείνει σέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα μέ ἄπειρο πλάτος. Ἕνα ἐπίπεδο TEM κύμα μέ ἠλεκτρικό πεδίο παράλληλο μέ τή διάσταση d περνᾶ ἐλεύθερα γιατί ἱκανοποιεῖ τίς ὁριακές συνθῆκες :



Σχ. 2

Ἐφαπτομ.συνιστώσα τοῦ $\vec{E}=0$
Κάθετη συνιστώσα τοῦ $\vec{H}=0$ (1)

στήν ἐπιφάνεια καθενός ἀπό τά δύο ὁριζόντια ἐπίπεδα.

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα τούς κυματικούς τύπου TE_{mn}, πού μπορεῖ νά κυματοδηγήσει ὁ κυματοδηγός ὅταν $w \to \infty$ (στήν πράξη ὅταν $w \gg d$). Στή γενική περίπτωση μέ w καί d πεπερασμένα, οἱ συνιστῶσες τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τοῦ

τύπου TE_{mn} εἶναι (βλ. σχέσεις (5-69)) :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= 0 \\ \mathcal{E}_y &= \frac{j\omega\mu k_z}{k_c^2}\, \mathcal{H}_o \cos k_y y \sin k_z z\, e^{j(\omega t-\beta_{mn}x)} \\ \mathcal{E}_z &= -\frac{j\omega\mu\, k_y}{k_c^2}\, \mathcal{H}_o \sin k_y y \cos k_z z\, e^{j(\omega t-\beta_{mn}x)} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ὅπου $$k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 = \frac{m^2\pi^2}{w^2} + \frac{n^2\pi^2}{d^2} \quad \text{καί} \quad \beta_{mn}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k_c^2 \quad (3)$$

Ὅταν $w \rightarrow \infty$ (στήν πράξη ὅταν $w >> d$) τότε $k_y \rightarrow 0$ (στήν πράξη $k_y << k_z$) καί τότε

$$k_c = k_z = \frac{n\pi}{d} \quad (4)$$

ὅπου n θετικός ἀκέραιος ἀριθμός. Τότε οἱ (2) γίνονται :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= 0 \\ \mathcal{E}_y &= \frac{j\omega\mu\, d}{n\pi}\, \mathcal{H}_o \sin\left(\frac{n\pi}{d} z\right) e^{j(\omega t-\beta x)} \\ \mathcal{E}_z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ὥστε, μποροῦν νά διαδοθοῦν οἱ κυματικοί τύποι TE_{mn} , πού ἔχουν μόνο τήν $E_y \neq 0$, πoύ ἔχουν δηλ. τό ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ πολωμένο παράλληλα μέ τά ἐπίπεδα. Σύμφωνα μέ τά γνωστά μας, διάδοση μπορεῖ νά γίνει μόνο ὅταν :

$$\lambda < \lambda_{op} \equiv \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi d}{n\pi} = \frac{2d}{n} \quad (6)$$

ἐνῶ ὅταν $$\lambda > \frac{2d}{n} \quad (7)$$
δέν ἐπιτρέπεται διάδοση.

Ἐπειδή $n = 1,2,3,\ldots$ ἡ (6), ἄν ἱκανοποιεῖται μέ $n = 1$, ἱκανοποιεῖται καί μέ κάθε ἄλλο n .

Ἑπομένως ἀρκεῖ :

$$\lambda < 2d$$

$$\text{ἤ} \quad d > \frac{\lambda}{2} \tag{8}$$

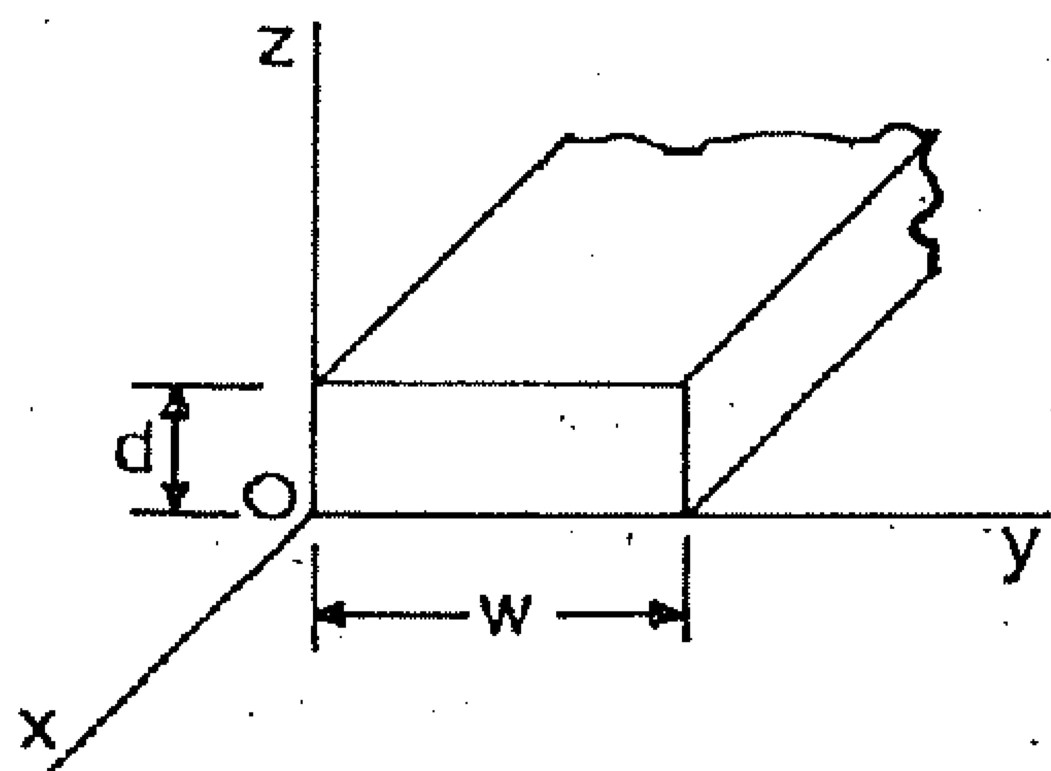
γιά νά ὑπάρχει διάδοση.

Ὥστε , ἄν προσπέσει ἕνα ἐπίπεδο TEM κύμα στή μιά πλευρά τῆς σειρᾶς τῶν ἐπιπέδων, μέ πόλωση παράλληλη μέ αὐτά, μπορεῖ νά περάσει μέσα τους σάν κυματικός τύπος TE_{mn} , ἄν ἰσχύει ἡ (8) . Ἄν ὄχι, δέν θά μεταδοθεῖ καθόλου .

Π α ρ α τ ή ρ η σ η :

Στή γενική περίπτωση, πού τό $\vec{E}$ τοῦ κύματος σχηματίζει τυχαία γωνία μέ τά ἐπίπεδα, τότε μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ δύο συνιστῶσες , μιά κάθετη καί μιά παράλληλη μέ αὐτά. Ἄν τότε ἰσχύει καί $d<\lambda/2$ τό σύστημα συμπεριφέρεται σάν πολωτής μέ χαρακτηριστικό ἐπίπεδο τό ἐπίπεδο xz .

5 . 4 Ἕνας ὀρθογώνιος κυματοδηγός ἔχει ἐσωτερικές ἐγκάρσιες διαστάσεις w καί d ($w > d$ βλ. σχ. 1) καί κυματοδηγεῖ τόν κυματικό τύπο TE_{10} σέ συχνότητα f.



Σχ. 1

Τό διηλεκτρικό τοῦ κυματοδηγοῦ εἶναι ἀέρας (ε_0 , μ_0). Στήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί γιά τή χρονική στιγμή $t = 0$ ἡ μαγνητική συνιστῶσα H_x ἔχει τιμή H_0 .

α. Νά προσδιορίσετε τή συνεχή συνιστῶσα τοῦ διανύσματος Poynting ($\vec{P}$) στό ἐσωτερικό τοῦ κυματοδηγοῦ.

β. Νά δώσετε τή γραφική παράσταση $\overline{P} = f(y)$, ὅπου $\overline{P} = \left|\vec{\overline{P}}\right|$, καθώς καί τή γραφική παράσταση $\overline{P} = f(z)$.

γ. Νά ὑπολογίσετε τήν ὁλική ἰσχύ N, πού κυματοδηγεῖται (ὑποθέτουμε ὅτι δέν ὑπάρχουν ἀπώλειες).

δ. Πόση εἶναι ἡ $\bar{N}$ στήν περίπτωση πού w = 2cm, d = 1cm , f = 10GHz , H_o = 5A/m ;

Λ ύ σ η

α. Οἱ συνιστῶσες τῶν πεδίων τοῦ τύπου TE_{10} (βλ. σχέσεις (5-66) εἶναι:

$$\mathcal{H}_x = H_o \cos\frac{\pi y}{w}\, e^{j(\omega t-\beta_{10}x)} \quad (1)$$

$$\mathcal{H}_y = \frac{j\beta_{10}w}{\pi} H_o \sin\frac{\pi y}{w}\, e^{j(\omega t-\beta_{10}x)} \quad (2)$$

$$\mathcal{H}_z = 0 \quad , \quad \mathcal{E}_x = 0 \quad , \quad \mathcal{E}_y = 0 \quad (3)$$

$$\mathcal{E}_z = \frac{-j\omega\mu_o w}{\pi} H_o \sin\frac{\pi y}{w}\, e^{j(\omega t-\beta_{10}x)} \quad (4)$$

ὅπου
$$\beta_{10}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \frac{\pi^2}{w^2} = \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 - \frac{\pi^2}{w^2} = \pi^2\left(\frac{4f^2}{c^2} - \frac{1}{w^2}\right) \quad (5)$$

Ἔχουμε τότε
$$\bar{\bar{P}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_z \\ \mathcal{H}_x^* & \mathcal{H}_y^* & 0 \end{vmatrix} \quad (6)$$

ἤ
$$\bar{\bar{P}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-\mathcal{E}_z \mathcal{H}_y^* \hat{x} + \mathcal{E}_z \mathcal{H}_x^* \hat{y}\right] \quad (7)$$

Ὥστε:

$$\bar{\bar{P}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-\frac{j\omega\mu_o w}{\pi}\frac{j\beta_{10}wH_o^2}{\pi}\sin^2\frac{\pi y}{w}\hat{x} - \frac{j\omega\mu_o w}{\pi}H_o^2\sin\frac{\pi y}{w}\cos\frac{\pi y}{w}\hat{y}\right]$$

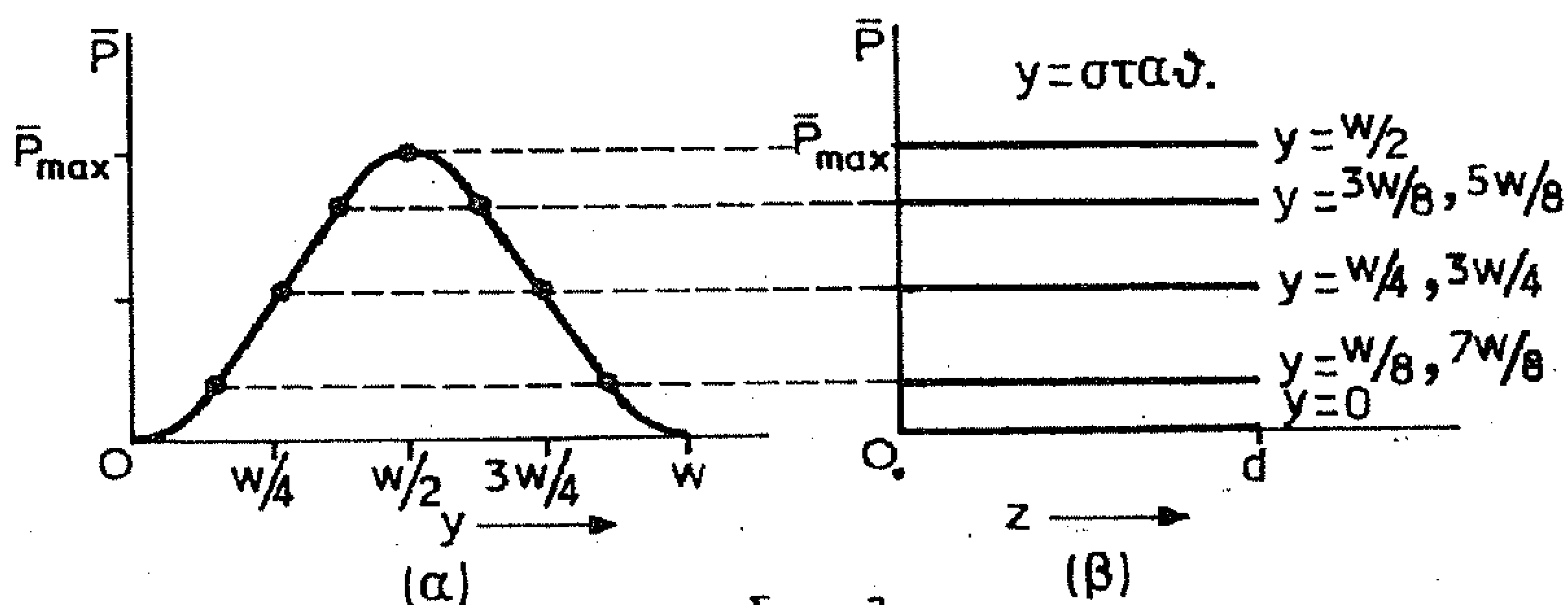
$$\bar{\bar{P}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{\mu_o\omega w^2 H_o^2\beta_{10}}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi y}{w}\hat{x} - j\frac{\mu_o\omega w}{\pi}H_o^2\sin\frac{\pi y}{w}\cos\frac{\pi y}{w}\hat{y}\right]$$

$$\bar{\bar{P}} = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_o \omega w^2 \beta_{10}}{\pi^2} H_o^2 \sin^2 \frac{\pi y}{w}\,\hat{x} = \frac{2\pi f \mu_o w^2 H_o^2}{2\pi^2} \sin^2 \frac{\pi y}{w}\,\pi\sqrt{\frac{4f^2}{c^2} - \frac{1}{w^2}}\;\hat{x}$$

ή
$$\bar{\bar{P}} = \mu_o w^2 H_o^2 \sin^2 \frac{\pi y}{w} f \sqrt{\frac{4f^2}{c^2} - \frac{1}{w^2}}\;\hat{x} \qquad (8)$$

ή
$$\boxed{\bar{\bar{P}} = \mu_o w H_o^2 \sin^2 \frac{\pi y}{w} f \sqrt{\frac{4f^2 w^2}{c^2} - 1}\;\hat{x}} \qquad (9)$$

β.Οἱ γραφικές παραστάσεις δίνονται στό σχῆμα 2(α,β)



Σχ. 2

όπου:
$$\bar{P}_{max} = \mu_o w H_o^2 f \sqrt{\frac{4f^2 w^2}{c^2} - 1} \qquad (10)$$

γ.Εἶναι:
$$\bar{N} = \int \bar{\bar{P}} \cdot \hat{x}\, dS \qquad (11)$$

όπου ἡ ὁλοκλήρωση γίνεται σ' ὅλη τήν ἐγκάρσια διατομή . 'Από τίς (9), (10) καί (11) προκύπτει :

$$\bar{N} = \bar{P}_{max} \int_0^d dz \int_0^w \sin^2 \frac{\pi y}{w} dy = \frac{w\,\bar{P}_{max}\,d}{\pi} \int_0^w \sin^2 \frac{\pi y}{w} d\left(\frac{\pi y}{w}\right) =$$

$$= \frac{w\,\bar{P}_{max}\,d}{\pi} \int_0^\pi \sin^2\vartheta\, d\vartheta = w d \bar{P}_{max} \left[\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\vartheta\, d\vartheta\right] = \frac{w d \bar{P}_{max}}{2}$$

ή
$$\boxed{\bar{N} = \frac{1}{2}\mu_o w^2 d H_o^2 f \sqrt{\frac{4f^2 w^2}{c^2} - 1}} \qquad (12)$$

δ. Ἀντικαθιστώντας τίς τιμές τῶν μεγεθῶν στή (12) βρίσκουμε :

$$\bar{N} = 0,55\ W\ .$$

5.5 Ἄν ω εἶναι ἡ κυκλική συχνότητα ἑνός ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος μέσα σ' ἕναν κυματοδηγό, πού εἶναι γεμάτος μέ τέλειο διηλεκτρικό, β ἡ σταθερά φάσης του μέσα στόν κυματοδηγό καί υ ἡ ταχύτητα τοῦ κύματος στό ἐλεύθερο διηλεκτρικό.

α. Νά δώσετε τή σχέση ω = ω(β) (ἐξίσωση διασπορᾶς)

β. Νά δώσετε, ποιοτικά, τή γραφική παράσταση τῆς προηγούμενης σχέσης προσδιορίζοντας καί τίς τιμές τῶν ω γιά β=0 καί β πολύ μεγάλο.

γ. Νά ὑποδείξετε πῶς, ἀπό τό διάγραμμα αὐτό, μποροῦμε νά προσδιορίσουμε, γραφικά, τήν ταχύτητα φάσης $υ_p$ καί τήν ταχύτητα ὁμάδας $υ_g$.

Λ ύ σ η

α. Ἀπό τή θεωρία ξέρουμε ὅτι ἡ σχέση τοῦ $β^2$ μέ τό ω εἶναι :

$$β^2 = \frac{ω^2}{υ^2} - k_c^2 \qquad (1)$$

ὅπου k_c^2 γεωμετρικός παράγοντας, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό εἶδος τοῦ κυματοδηγοῦ. π.χ. στόν ὀρθογώνιο κυματοδηγό εἶναι :

$$k_c^2 = k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{w}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 \qquad (2)$$

Λύνοντας τήν (1) γιά τό ω ἔχουμε :

$$\boxed{ω = \sqrt{υ^2 β^2 + υ^2 k_c^2}} \qquad (3)$$

β. Στό σχῆμα φαίνεται ἡ ζητούμενη γραφική παράσταση.

Γιά β = 0 ἔχουμε:

$$\omega = \omega_{op} = \upsilon k_c$$

$$\boxed{\omega_{op} = \upsilon\, k_c} \qquad (4)$$

ἐνῶ γιά $\beta \gg k_c$ ἡ (3) γίνεται:

$$\boxed{\omega = \upsilon \beta} \qquad (5)$$

Ἡ (5) εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς ἀσύμπτωτης εὐθείας πού ἰσχύει γιά τό ἐλεύθερο διηλεκτρικό ἀφοῦ τότε εἶναι :

$$\beta = \frac{\omega}{\upsilon} \qquad (6)$$

Ἀπό τήν (4) ἔχουμε τή γνωστή μας σχέση:

$$\lambda_{op} = \frac{2\pi}{k_c} \qquad (7)$$

γ. Ἐπειδή

$$\upsilon_p = \frac{\omega}{\beta} \qquad (8)$$

ἀπό τό διάγραμμα, γιά τό συγκεκριμένο ω , βρίσκουμε τό ἀντίστοιχο β καί ὑπολογίζουμε τό πηλίκο τους.

Ἐξάλλου ἡ ταχύτητα ὁμάδας υ_g εἶναι :

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{d\beta} \qquad (9)$$

εἶναι δηλ. ἴση μέ τήν κλίση τῆς καμπύλης διασπορᾶς στό ἀντίστοιχο ω .

5.6 α. Πόση εἶναι ἡ διάμετρος ἑνός κυκλικοῦ κυλινδρικοῦ κυματοδηγοῦ γεμάτου μέ ἀέρα (ε_0, μ_0) ἄν ἡ ὁρική συχνότητά του στόν κυματικό τύπο TE_{11} εἶναι 9,2 GH_z ;

β. Σέ ποιά συχνότητα θά ἀρχίσει νά ἐμφανίζεται διάδοση τοῦ κυματικοῦ τύπου TM_{01} μέσα στόν κυματοδηγό;

Λ ύ σ η

α. Ἄν 2α ἡ διάμετρος τοῦ κυματοδηγοῦ εἶναι:

$$\lambda_{opTE_{11}} = \frac{2\pi\alpha}{p'_{11}} \qquad (1)$$

ὅπου p'_{11} ἡ πρώτη ρίζα τῆς $J'_1(u)$, πού ἀπό τό σχετικό πίνακα ριζῶν βρίσκεται ὅτι εἶναι:

$$p'_{11} = 1,8412 \qquad (2)$$

$$f_{opTE_{11}} = \frac{c}{\lambda_{opTE_{11}}} = \frac{c p'_{11}}{2\pi\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{c p'_{11}}{2\pi f_{opTE_{11}}}$$

καί $\alpha = \dfrac{3\cdot 10^8 \cdot 1,8412}{2\pi\ 9,2\ 10^9}\ m = 0,0095\,m = 0,95\,cm$

$$\underline{\alpha = 0,95\,cm}$$

β. Τό ὁρικό μῆκος κύματος τοῦ τύπου TM_{01} εἶναι:

$$\lambda_{opTM_{01}} = \frac{2\pi\alpha}{p_{01}} \qquad (3)$$

ὅπου p_{01} ἡ πρώτη ρίζα τῆς $J_o(u)$, πού εἶναι

$$p_{01} = 2,4048 \qquad (4)$$

Ὥστε:

$$f_{opTM_{01}} = \frac{c}{\lambda_{opTM_{01}}} = \frac{c p_{01}}{2\pi\alpha} = \frac{3\cdot 10^8\ 2,4048}{2\pi\ 0,95\ 10^{-2}}\ Hz = 12,1\ 10^9\ Hz$$

$$\underline{f_{opTM_{01}} = 12,1\ GHz}$$

5.7 Νά ἀποδείξετε ὅτι, γιά ὅλους τούς κυματικούς τύπους TM_{nl} ἑνός κυκλικοῦ κυματοδηγοῦ, τήν ἐλάχιστη ἐξασθένηση λόγω ἀτελοῦς ἀγωγιμότητας ἔχουμε στή συχνότητα:

$$f_m = \sqrt{3}\, f_{op}$$

καί νά προσδιορίσετε τήν ἐξάρτηση τοῦ συντελεστῆ ἐξασθένησης (λόγω ἀτελοῦς ἀγωγιμότητας) στή συχνότητα αὐτή ἀπό τήν τιμή τῆς f_{op}.

Λ ύ σ η

Ὁ συντελεστής ἐξασθένησης λόγω ἀτελοῦς ἀγωγιμότητας τῶν τοιχωμάτων τοῦ κυκλικοῦ κυματοδηγοῦ εἶναι:

$$\alpha_{TMnl} = \frac{R_S}{\alpha Z_d \sqrt{1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \qquad (1)$$

ὅπου R_s ἡ ἐπιδερμική ἀντίσταση τοῦ ἀγωγοῦ:

$$R_S = \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \qquad (2)$$

καί σ_c , μ_c ἡ εἰδική ἀγωγιμότητα καί ἡ μαγνητική διαπερατότητα τοῦ ἀγωγοῦ . Ὥστε :

$$\alpha_{TMnl} = \frac{1}{\alpha Z_d} \sqrt{\frac{\pi \mu_c}{\sigma_c}} \sqrt{\frac{f^3}{f^2 - f_{op}^2}} \qquad (3)$$

Εἶναι φανερό (μπορεῖ ν' ἀποδειχτεῖ μέ παραγώγιση τῆς (3))ὅτι ὁ α, ὅσο ἡ f μεγαλώνει ἀπό τήν τιμή f_{op} καί πάνω, ὡς τό ἄπειρο , ἐμφανίζει ἐλάχιστο σέ κάποια συχνότητα f_m .Τήν τιμή αὐτή τῆς f_m τή βρίσκουμε μηδενίζοντας τήν πρώτη παράγωγο τῆς (3) .Δηλαδή :

$$\left.\frac{\partial \alpha_{TMnl}}{\partial f}\right|_{f=f_m} = \frac{1}{\alpha Z_d} \sqrt{\frac{\pi \mu_c}{\sigma_c}} \left. \frac{\dfrac{(f^2 - f_{op}^2)3f^2 - 2f^3 f}{(f^2 - f_{op}^2)^2}}{2\sqrt{\dfrac{f^3}{f^2 - f_{op}^2}}} \right|_{f=f_m} = 0 \qquad (4)$$

ἤ $$3(f_m^2 - f_{op}^2) = 2 f_m^2 \qquad (5)$$

ἤ ἀκόμα $$f_m^2 = 3 f_{op}^2$$

ἤ τελικά $$\boxed{f_m = \sqrt{3}\, f_{op}} \qquad (6)$$

Ἀντικαθιστοῦμε στήν (3) καί ἔχουμε :

$$\left(\alpha_{TMnl}\right)_{min} = \frac{1}{\alpha Z_d} \sqrt{\frac{\pi \mu_c}{\sigma_c}} \sqrt{\frac{3\sqrt{3}\, f_{op}^3}{3 f_{op}^2 - f_{op}^2}} =$$

ή $$(\alpha_{TMnl})_{min} = \frac{1}{\alpha Z_d}\sqrt{\frac{3\sqrt{2}\,\pi\mu_c}{2\sigma_c}}\sqrt{f_{op}} \qquad (7)$$

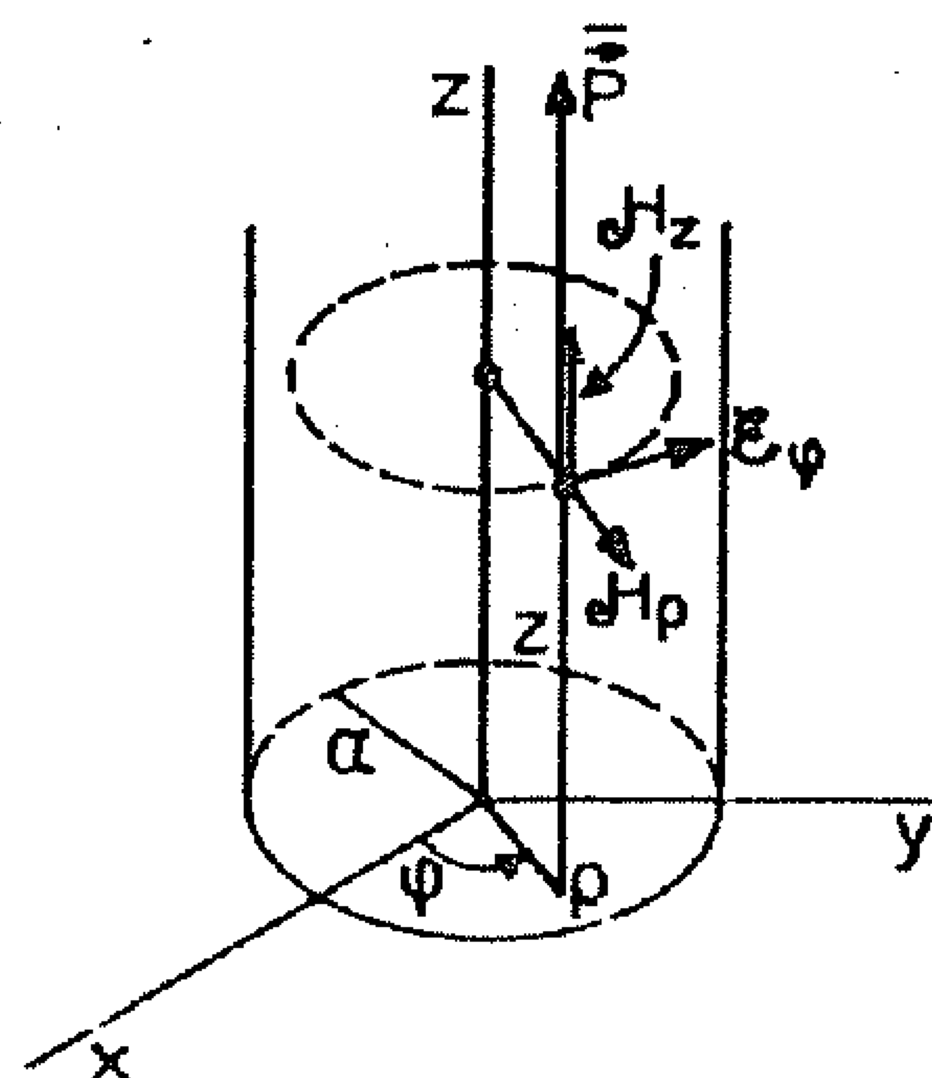
καί ἀφοῦ $$Z_d = \sqrt{\frac{\mu_d}{\varepsilon_d}} \qquad (8)$$

$$\boxed{(\alpha_{TMnl})_{min} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}\,\pi\mu_c\varepsilon_d}{2\alpha^2\sigma_c\mu_d}}\sqrt{f_{op}}} \qquad (9)$$

5.8 Νά ὑπολογίσετε τήν ἰσχύ, πού κυματοδηγεῖται ἀπό ἕναν κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό πού εἶναι διεγερμένος στόν τύπο TE_{01} , ἄν στήν ἀρχή τῶν ἀξόνων (ρ=0 , z=0) τό πλάτος τῆς μαγνητικῆς z-συνιστώσας εἶναι H_o . Ἡ ἀκτίνα τοῦ κυματοδηγοῦ εἶναι α καί εἶναι κενός.

Λ ύ σ η

Ἡ μαγνητική z-συνιστώσα τοῦ κυματικοῦ τύπου TE_{01} , ὅπως ξέρουμε ἀπό τή θεωρία (βλ. σχέσεις τοῦ πίνακα 5-I) εἶναι :



$$\mathcal{H}_z = H_o J_o(k_c\rho)e^{j(\omega t-\beta z)} \qquad (1)$$

Οἱ ὑπόλοιπες συνιστῶσες εἶναι:

$$\mathcal{E}_\rho = 0 \qquad (2)$$

$$\mathcal{E}_\varphi = jZ_o\frac{\lambda_{op}}{\lambda}H_o J_o'(k_c\rho)e^{j(\omega t-\beta z)} \qquad (3)$$

$$\mathcal{H}_\varphi = 0 \qquad (4)$$

$$\mathcal{H}_\rho = -j\frac{Z_o}{Z_{TE}}\frac{\lambda_{op}}{\lambda}H_o J_o'(k_c\rho)e^{j(\omega t-\beta z)} \qquad (5)$$

$$\mathcal{E}_z = 0 \qquad (6)$$

Στό σχῆμα εἶναι σχεδιασμένες οἱ μή μηδενικές προβολές.
Ἡ συνεχής συνιστώσα τοῦ διανύσματος Poynting εἶναι :

$$\bar{\bar{P}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\bar{\mathcal{E}}\times\bar{\mathcal{H}}^*) \qquad (7)$$

ή $\bar{\bar{P}} = \frac{1}{2} Re\left[-\mathcal{E}_{\varphi}\mathcal{H}_{\rho}^{*}\hat{z} + \mathcal{E}_{\varphi}\mathcal{H}_{z}^{*}\hat{\rho}\right] = \frac{1}{2} Re\left[-jZ_o \frac{\lambda_{op}}{\lambda} H_o J_o'(k_c\rho) j \frac{Z_o}{Z_{TE}} \cdot \right.$

$$\left. \cdot \frac{\lambda_{op}}{\lambda} H_o J_o'(k_c\rho)\hat{z} + jZ_o \frac{\lambda_{op}}{\lambda} H_o J_o'(k_c\rho) H_o J_o(k_c\rho)\hat{\rho}\right] \quad (8)$$

ή

$$\boxed{\bar{\bar{P}} = \frac{Z_o^2 H_o^2 J_o'^2(k_c\rho)}{2Z_{TE}} \left(\frac{\lambda_{op}}{\lambda}\right)^2 \hat{z}} \quad (9)$$

Τό μέτρο $\bar{P}$ τοῦ $\bar{\bar{P}}$ ἐκφράζει τήν ἰσχύ ἀνά μονάδα διατομῆς. Ὥστε, ἄν S ἡ διατομή , ἡ ὀλική ἰσχύς πού κυματοδηγεῖται εἶναι :

$$\bar{N} = \int_S \bar{\bar{P}}\cdot\hat{z}\, dS = \int_S \bar{P}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} \bar{P}\rho\, d\rho\, d\varphi \quad (10)$$

καί ἐπειδή εἶναι: $\bar{P} = \bar{P}(\rho)$ (11)

ἔχουμε

$$\bar{N} = 2\pi\int_0^{\alpha} \bar{P}\rho\, d\rho \quad (12)$$

ή

$$\bar{N} = \frac{\pi Z_o^2 H_o^2}{Z_{TE}} \left(\frac{\lambda_{op}}{\lambda}\right)^2 \int_0^{\alpha} J_o'^2(k_c\rho)\rho\, d\rho \quad (13)$$

ή τέλος

$$\boxed{\bar{N} = \frac{\pi Z_o^2 H_o^2}{k_c^2 Z_{TE}} \left(\frac{\lambda_{op}}{\lambda}\right)^2 \int_0^{k_c\alpha} J_o'^2(\upsilon)\upsilon\, d\upsilon} \quad (14)$$

ὅπου:

$$Z_o = 377\Omega = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} \quad (15)$$

$$k_c = (k_c)_{ol} = \frac{p_{ol}'}{\alpha} \quad (16)$$

ὅπου P_{ol}' εἶναι ἡ l τάξης ρίζα τῆς $J_o'(\upsilon)$

$$f_{op} = \frac{c p_{ol}'}{2\pi\alpha} \quad (17)$$

καί

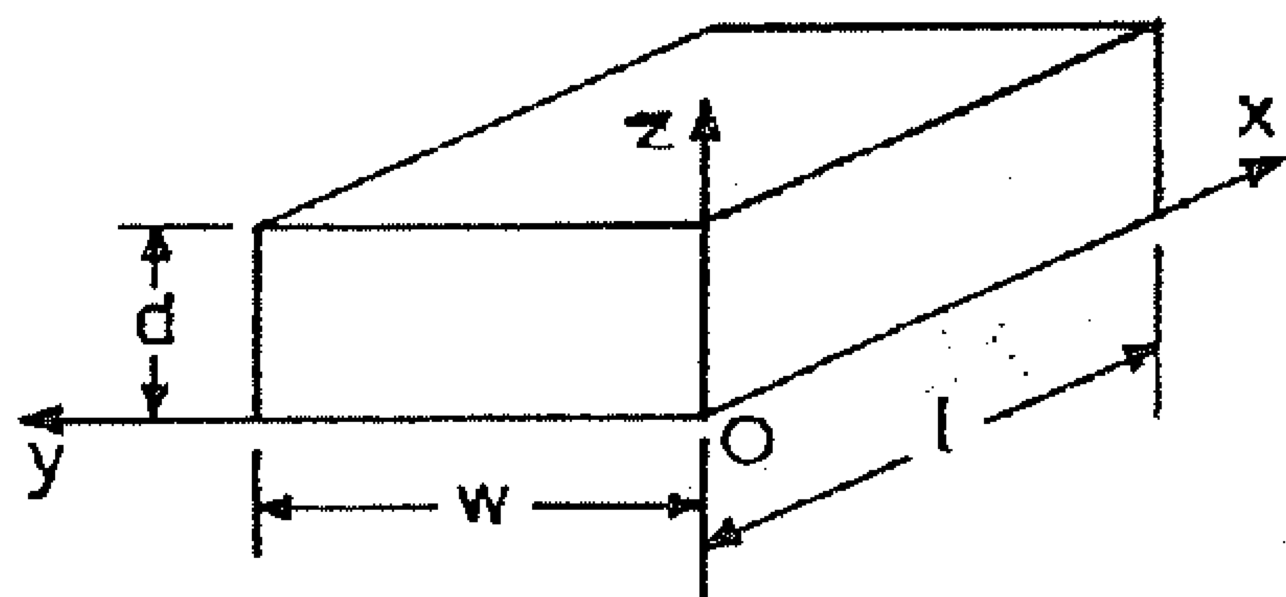
$$Z_{TE} = \frac{Z_o}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{op}}\right)^2}} \quad (18)$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ η : Στόν ὑπολογισμό τῆς (14) μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τή σχέση: $J_o'(\upsilon) = -J_1(\upsilon)$ (19)

καί τόν ἀναγωγικό τύπο: $\int J_n^2(\upsilon)\upsilon\, d\upsilon = \frac{\upsilon^2}{2}\left[J_n^2(\upsilon) - J_{n-1}(\upsilon)J_{n+1}(\upsilon)\right]$.

5.9 Μελέτη τοῦ ὀρθογώνιου ἠλεκτρομαγνητικοῦ ἀντηχείου σέ κυματικό τύπο TE_{101} .

Ἔστω ὅτι τό ὀρθογώνιο ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο τοῦ σχήματος πάλλεται στόν κυματικό τύπο TE_{101}. Ἄν τό διηλεκτρικό τοῦ ἀντηχείου εἶναι ἀέρας



α. Νά προσδιοριστεῖ ἡ συχνότητα συντονισμοῦ f_{101} τοῦ ἀντηχείου.

β. Ἄν w=2cm καί d=1cm πόσο πρέπει νά εἶναι τό l γιά νά συντονίζει τό ἀντηχεῖο στά 10 GHz ;

γ. Νά προσδιοριστεῖ ἡ στιγμιαία ἠλεκτρική ἐνέργεια W_e , πού εἶναι ἀποθηκευμένη μέσα στό ἀντηχεῖο, καθώς καί ἡ στιγμιαία μαγνητική ἐνέργεια W_m .

δ. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι, ἄν ἀγνοηθοῦν οἱ ἀπώλειες στά τοιχώματα, ἡ ὁλική ἀποθηκευμένη ἠλεκτρομαγνητική ἐνέργεια μέσα στό ἀντηχεῖο εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό χρόνο.

ε. Ἄν, μέ μιά γραμμή μεταφορᾶς, τροφοδοτεῖται τό ἀντηχεῖο μέ ἰσχύ τόση, ὅση ἀκριβῶς καταναλώνεται στά τοιχώματά του, νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἰσχύς, πού χάνεται σέ κάθε ἕνα ζευγάρι παράλληλων τοιχωμάτων του.

στ. Νά προσδιοριστεῖ ὁ συντελεστής ποιότητας Q τοῦ ἀντηχείου, πού ὁρίζεται ἀπό τή σχέση :

$$Q = 2\pi \frac{\text{ὁλική ἀποθηκευμένη ἐνέργεια}}{\text{ἐνέργεια πού χάνεται σέ μιά περίοδο}} = 2\pi \frac{W}{W_T} .$$

ζ. Νά προσδιοριστεῖ τό Q στήν περίπτωση πού w=l (τετράγωνο ἀντηχεῖο) καί νά ὑπολογιστεῖ τό Q τοῦ ἀντηχείου τοῦ ἐρωτήματος β , ἄν τό ἀντηχεῖο εἶναι χάλκινο καί τό βάθος δι-

εἰσδυσης στό χαλκό εἶναι :

$$x_o = \frac{6,6 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{f}}$$ σέ m ἄν τό f σέ Hz .

η. Ἄν τό ἀντηχεῖο τοῦ ἐρωτήματος β τροφοδοτεῖται ἀπό γραμμή μεταφορᾶς μέ σταθερή ἰσχύ 0,1 W καί βρίσκεται σέ ἰσορροπία, νά προσδιοριστεῖ τό πλάτος H_o τῆς μαγνητικῆς διέγερσης μέσα του (γιά τό χαλκό $\sigma = 5,7.10^7\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$) .

Λ ύ σ η

α. Ἀπό τή σχέση (5-152) τῆς θεωρίας, γιά m = 1 , n = 0 καί p = 1 , προκύπτει:

$$\frac{\omega^2}{\upsilon^2} = \pi^2\left(\frac{1}{w^2}+\frac{1}{l^2}\right) = \frac{\pi^2}{w^2}\left(1+\frac{w^2}{l^2}\right) \qquad (1)$$

ἀπό τή σχέση αὐτή μέ υ = c καί ω = 2πf ἔχουμε:

$$f_{101} = \frac{c}{2w}\sqrt{1+\frac{w^2}{l^2}} \qquad (2)$$

β. Ἀπό τή (2) προκύπτει ἡ διτετράγωνη ἐξίσωση:

$$4f_{101}^2\, l^4 - c^2 l^2 - w^2 c^2 = 0 \qquad (3)$$

πού ἔχει τή θετική πραγματική λύση:

$$l = \sqrt{\frac{c^2+\sqrt{c^4+16 f_{101}^2\ w^2 c^2}}{8 f_{101}^2}} \qquad (4)$$

ἀντικαθιστῶντας τίς τιμές βρίσκουμε : $l = 2,08\ cm$

γ. Οἱ συνιστῶσες πεδίου τοῦ τύπου TE_{101} τοῦ ὀρθογώνιου ἀντηχείου δίνονται ἀπό τίς σχέσεις (5-154). Ἄν V ὁ ὄγκος τοῦ ἀντηχείου εἶναι:

$$W_e = \int_V w_e\, dV = \frac{1}{2}\varepsilon_o\int_V E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_o\int_V E_z^2\, dV \qquad (5)$$

καί ἐπειδή, ἄν $\dot{H}_o = H_o$ (δηλ. ἔχει φάση μηδέν) , εἶναι:

$$E_z = \frac{\omega\mu w H_o}{\pi}\sin\frac{\pi y}{w}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \qquad (6)$$

ἔχουμε :

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2}(2f_{101}\mu wH_0)^2\cos^2\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\int_0^l\int_0^w\int_0^d \sin^2\frac{\pi y}{w}\sin^2\frac{\pi x}{l}dx\,dy\,dz \quad (7)$$

Μετά τήν ὁλοκλήρωση ἔχουμε :

$$W_e = \frac{\mu_0 H_0^2\, l\, w\, d}{8}\left(1+\frac{w^2}{l^2}\right)\sin^2\omega t \quad (8)$$

Ἀνάλογα ἔχουμε :

$$W_m = \frac{\mu_0}{2}\int_V H^2 dV \quad (9)$$

ὅπου $$H^2 = H_x^2 + H_y^2 \quad (10)$$

καί $$H_x = H_0\cos\frac{\pi y}{w}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\omega t \quad (11)$$

$$H_y = -\frac{w}{l}H_0\sin\frac{\pi y}{w}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\omega t \quad (12)$$

Τελικά βρίσκουμε:

$$W_m = \frac{\mu_0 H_0^2\, l\, w\, d}{8}\left(1+\frac{w^2}{l^2}\right)\cos^2\omega t \quad (13)$$

δ. Ἀπό τίς (8) καί (13) ἔχουμε:

$$W = W_e + W_m = \frac{\mu_0 H_0^2\, l\, w\, d}{8}\left(1+\frac{w^2}{l^2}\right) \quad (14)$$

Ἄν ἀγνοηθοῦν οἱ ἀπώλειες εἶναι H_0 = σταθ. καί ἑπομένως:

W = σταθ.

ε. Ἔστω $\bar{N}_x$ ἡ ἰσχύς πού χάνεται στά δύο τοιχώματα πού εἶναι κάθετα στόν ἄξονα x καί ἀντίστοιχα $\bar{N}_y$ καί $\bar{N}_z$ γιά τούς ἄλλους ἄξονες. Στή $\bar{N}_x$ συνεισφέρει μόνο ἡ παράλληλη συνιστῶσα $\mathcal{H}_y$ (βλ. πρόβλ. 4.5 καί προβλ. 4.4). Ἄν $\bar{P}_x$ εἶναι ἡ ἰσχύς ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας πού χάνεται, ἔχουμε γιά τό τοίχωμα x = 0 :

$$\bar{P}_x = \frac{1}{2}R_S\left|\mathcal{H}_y\right|^2_{x=0} \quad (15)$$

Ὥστε $$\bar{N}_x = 2\int_{y=0}^{w}\int_{z=0}^{d} P_x\,dy\,dz = R_S\int_{y=0}^{w}\int_{z=0}^{d}\left|\mathcal{H}_y\right|^2_{x=0}dy\,dz \quad (16)$$

Ἀλλά εἶναι : $$\left|\mathcal{H}_y\right|^2_{x=0} = \left(\frac{w}{l}\right)^2 H_0^2\sin^2\frac{\pi y}{w} \quad (17)$$

ή τελικά:

$$\bar{N}_x = \frac{1}{2} R_S H_0^2 \left(\frac{w}{l}\right)^2 wd \qquad (18)$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο στήν ἰσχύ $\bar{N}_y$ συνεισφέρει ἡ $\mathcal{H}_x$ ἐνῶ στήν ἰσχύ $\bar{N}_z$ συνεισφέρουν καί ἡ $\mathcal{H}_x$ καί ἡ $\mathcal{H}_y$.

Οἱ ἀντίστοιχοι ὑπολογισμοί δίνουν :

$$\bar{N}_y = \frac{1}{2} R_S H_0^2 \, ld \qquad (19)$$

καί

$$\bar{N}_z = \frac{1}{4} R_S H_0^2 \left(1 + \frac{w^2}{l^2}\right) wl \qquad (20)$$

στ. Ἡ ὁλική μέση ἰσχύς $\bar{N}$ πού χάνεται στά τοιχώματα εἶναι:

$$\bar{N} = \bar{N}_x + \bar{N}_y + \bar{N}_z \qquad (21)$$

καί ἐπομένως:

$$Q = \frac{2\pi f W}{\bar{N}} = \frac{\mu_0 \pi f}{R_S} lwd \frac{1 + \frac{w^2}{l^2}}{2\left(\frac{w}{l}\right)^2 wd + 2ld + \left(1 + \frac{w^2}{l^2}\right) wl} \qquad (22)$$

ζ. Γιά $w = l$ ἡ (22) δίνει:

$$Q = \frac{2\mu_0 \pi f}{R_S} \frac{lwd}{2(wd + ld + wl)} \qquad (23)$$

ή

$$Q = \frac{2\mu_0 \pi f}{R_S} \frac{V}{S_{o\lambda}} \qquad (24)$$

ὅπου $V = lwd$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἀντηχείου καί $S_{o\lambda} = 2(wd + ld + wl)$ τό συνολικό ἐμβαδό τῶν ἐσωτερικῶν του τοιχωμάτων.

Δεδομένου ὅτι

$$R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \qquad (25)$$

καί τό βάθος διεισδυσης $\quad x_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \qquad (26)$

ἡ (24) μπορεῖ νά γραφεῖ:

$$Q = \frac{2}{x_0} \frac{V}{S_{o\lambda}} \qquad (27)$$

Στήν περίπτωση τοῦ ἐρωτ. β εἶναι $w = 2d = 2$cm καί $f = 10$ $GH_z = 10^{10}$Hz , προσδιορίστηκε δέ $l = 2{,}08$ cm $\simeq 2$ cm.

Μποροῦμε λοιπόν νά χρησιμοποιήσουμε τή σχέση (27) :

$$Q = \frac{2\cdot 10^5}{6,6\ 10^{-2}}\,\frac{4\cdot 10^{-6}}{16\cdot 10^{-4}} = 7576 \qquad (28)$$

Ἄν λογαριάσουμε τό Q ἀπό τήν (22) βρίσκουμε τήν ἀκριβέστερη τιμή : Q = 7646 .

η. Ἀπό τίς (18),(19),(20) καί (21) ἔχουμε:

$$\bar{N} = \frac{1}{4} R_S H_o^2 \left[2\left(\frac{w}{l}\right)^2 wd + 2ld + \left(1+\frac{w^2}{l^2}\right) wl \right] \qquad (29)$$

Γιά $w \simeq l$ ἔχουμε:

$$\bar{N} = \frac{1}{4} R_S H_o^2 S_{o\lambda} \qquad (30)$$

Εἶναι ὅμως : $$R_S = \frac{1}{\sigma x_o} \qquad (31)$$

Ὥστε $$\bar{N} = \frac{1}{4\sigma x_o} H_o^2 S_{o\lambda} \qquad (32)$$

καί $$H_o = \sqrt{\frac{4\sigma x_o \bar{N}}{S_{o\lambda}}} \qquad (33)$$

Θέτοντας στήν (33) $\bar{N} = 0,1$ W , $\sigma = 5,7\cdot 10^7\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$, $S_{o\lambda} = 16\cdot 10^{-4}\ m^2$ καί $x_o = \frac{6,6\ 10^{-2}}{10^5}$ m

ἔχουμε τελικά: $\underline{H_o = 94\ A/m}$.

5.10 Ἕνας ὀρθογώνιος κυματοδηγός ἔχει ἐσωτερικές ἐγκάρσιες διαστάσεις w = 8 cm καί d = 4cm, καί περιέχει ἀέρα.

α. Νά προσδιοριστοῦν οἱ ὁρικές συχνότητες τῶν ἀκόλουθων κυματικῶν τύπων: TEM, TE_{10} , TE_{20}, TE_{01}, TE_{02}, TE_{11} , TE_{21}, καί TE_{12} .

β. Νά προσδιοριστεῖ ὁ λόγος τῆς ταχύτητας, πού ἔχει τό κύ-

μα μέσα στόν κυματοδηγό, πρός τήν ταχύτητά του στόν ἐλεύθερο ἀέρα, γιά κάθε ἕναν ἀπό τούς παραπάνω κυματικούς τύπους στή συχνότητα $f = 1,5\ f_{op}$.

('Απ. α. 'Ο τύπος TEM δέν διαδίδεται

TE_{10}	:	$f_{op} = 1,87$	GHz
TE_{20}	:	3,75	GHz
TE_{01}	:	3,75	GHz
TE_{02}	:	7,50	GHz
TE_{11}	:	4,19	GHz
TE_{21}	:	5,30	GHz
TE_{12}	:	7,73	GHz

β. $\frac{\upsilon_\kappa}{\upsilon} = 1,342$ γιά ὅλους τούς τύπους πού διαδίδονται) .

5.11 Νά ὑπολογιστοῦν ἡ ταχύτητα φάσης (υ_p) καί ἡ ταχύτητα ὁμάδας (υ_g) τοῦ κυματικοῦ τύπου H_{10} μέσα σ' ἕναν ὀρθογώνιο κυματοδηγό, πού ἔχει ἐσωτερικές ἐγκάρσιες διαστάσεις $w = 2,5$cm καί $d = 1,25$ cm καί περιέχει ἀέρα. 'Η συχνότητα τοῦ κύματος εἶναι $f = 10$ GHz.

('Απ. $\upsilon_p = 3,75 \cdot 10^8$ m/sec , $\upsilon_g = 2,4 \cdot 10^8$ m/sec)

5.12 Νά ὑπολογιστοῦν οἱ διαστάσεις w καί d ἑνός ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ, ἄν $\frac{w}{2} < d < w$ καί ὁ κυματοδηγός μέ διηλεκτρικό τόν ἀέρα, θέλουμε νά μεταδίδει τόν κυματικό τύπο TE_{10} σέ συχνότητα $f = 3$GHz καί μέ παράγοντα ἀσφάλειας 30% (δηλ. $f = 1,3 f_{op}$). 'Επιπλέον, ὅμως, ὁ κυματικός τύπος μέ τήν ἀμέσως μεγαλύτερη ὁρική συχνότητα νά βρίσκεται 30% κάτω ἀπό αὐτήν. (ἐξετάσεις Δεκεμ. 1978) ('Απ. $w = 6,5$ cm , $d = 3,5$ cm)

5.13 Ἡ ἐξίσωση διασπορᾶς γιά ἕναν ὀρθογώνιο κυματοδηγό καί γιά ἕναν ἀπό τούς κυματικούς τύπους TE_{mn} μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς ἑξῆς :

$$\omega^2 = A\left(\beta^2 + \frac{\pi^2}{w^2} + \frac{\pi^2}{d^2}\right) \qquad (1)$$

ὅπου ω ἡ κυκλική συχνότητα τοῦ κύματος, β ἡ σταθερά φάσης του , π=3,14 , w καί d οἱ ἐγκάρσιες διαστάσεις τοῦ κυματοδηγοῦ καί $A = 9.10^{16}\ m^2/sec^2$ (Εἶναι $w > d$).

α. Νά προσδιοριστοῦν οἱ ἀριθμοί m καί n τοῦ συγκεκριμένου αὐτοῦ τύπου TE_{mn}, καθώς καί ἡ τιμή υ τῆς ταχύτητας διαδόσεως, πού θά εἶχε τό κύμα μέ τήν ἴδια κυκλική συχνότητα στό ἐλεύθερο διηλεκτρικό.

β. Νά προσδιοριστοῦν ἡ σταθερά φάσης β τοῦ παραπάνω κυματικοῦ τύπου καί τό μῆκος κύματός του λ_κ , ἄν ἡ συχνότητά του εἶναι f = 10GHz καί εἶναι w = 3cm, d = 2cm .

γ. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα ὁμάδας υ_g μέσα στόν κυματοδηγό;

(Θέμα ἐξετάσεων Ὀκτωβρίου 1978)

('Απ. α. $m = n = 1$, $\upsilon = 3\cdot 10^8$ m/sec

β. $\beta = 91\ m^{-1}$, $\lambda_\kappa = 69$ mm

γ. $\upsilon_g = 1{,}3\cdot 10^8$ m/sec)

5.14 Οἱ ἐσωτερικές ἐγκάρσιες διαστάσεις ἑνός ὀρθογώνιου κυματοδηγοῦ εἶναι w = 5 cm καί d = 4 cm καί τό διηλεκτρικό τοῦ εἶναι ἀέρας:

α. Σέ συχνότητες κάτω ἀπό 8 GHz ποιοί κυματικοί τύποι TE καί TM διαδίδονται;

β. Στή συχνότητα $f = 1{,}7 f_{op}$ πόσος εἶναι ὁ λόγος τῆς ταχύτητας τοῦ κύματος μέσα στόν κυματοδηγό πρός τήν ταχύτητά του στόν ἐλεύθερο ἀέρα γιά κάθε κυματικό τύπο;

('Απ. α. TE_{10} 3,0 GHz , TE_{20} 6,0 GHz , TE_{11} 4,8 GHz

TE_{21} 7,1 GHz , TE_{01} 3,7 GHz , TE_{02} 7,5 GHz

TM_{11} 4,8 GHz , TM_{21} 7,1 GHz

β. $\upsilon_{\varkappa}/\upsilon = 1{,}237$ γιά ὅλους τούς τύπους)

5.15 Ἡ σχέση πού δίνει τό συντελεστή ἐξασθένησης α_c, λόγω ἀτελοῦς ἀγωγιμότητας, τῶν κυματικῶν τύπων TM_{mn} σ' ἕναν ὀρθογώνιο κυματοδηγό, εἶναι:

$$(\alpha_c)_{TMmn} = \frac{2R_s}{dZ_d\sqrt{1-\left(\frac{f_{op}}{f}\right)^2}} \frac{\left[m^2\left(\frac{d}{w}\right)^3 + n^2\right]}{\left[m^2\left(\frac{d}{w}\right)^2 + n^2\right]} \qquad (1)$$

Νά προσδιοριστεῖ ἡ συχνότητα f_m, στήν ὁποία ὁ α_c γίνεται ἐλάχιστος. (Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἡ ἐπιδερμική ἀντίσταση R_s εἶναι συνάρτηση τῆς συχνότητας βλ. καί προβλ. 5.7)

('Απ. $f_m = \sqrt{3}\, f_{op}$)

5.16 Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἕνας ὀρθογώνιος κυματοδηγός, πού ἔχει ἐσωτερικές ἐγκάρσιες διαστάσεις w καί d, ἐντελῶς ἀγώγιμα τοιχώματα καί εἶναι διεγερμένος στόν κυματικό τύπο TE_{10}, μεταδίδει ὁλική μέση ἰσχύ :

$$\bar{N} = \frac{\omega\mu\beta_{10}|\mathcal{H}_0|^2 d w^3}{4\pi^2}$$

5.17 Ἡ ἐσωτερική διάμετρος ἑνός κυλινδρικοῦ κυματοδηγοῦ, πού περιέχει ἀέρα, εἶναι 2α = 5cm.

α. Νά προσδιοριστοῦν οἱ ὁρικές συχνότητες τῶν κυματικῶν

τύπων: TM_{01} , TM_{02}, TM_{11}, TM_{12}, TE_{01}, TE_{02}, TE_{11} καί TE_{12} .

β. Πόσος εἶναι ὁ λόγος τῆς ταχύτητας τοῦ κύματος μέσα στό κυματοδηγό πρός τήν ταχύτητά του στόν ἐλεύθερο ἀέρα , γιά τούς παραπάνω κυματικούς τύπους καί στή συχνότητα $f = 1,3\ f_{op}$;

('Απ. α. TM_{01} 2,3 GHz , TM_{02} 5,3 GHz , TM_{11} 3,7 GHz
TM_{12} 6,7 GHz , TE_{01} 3,7 GHz , TE_{02} 6,7 GHz
TE_{11} 1,8 GHz , TE_{12} 5,1 GHz
β. $\upsilon_{\varkappa}/\upsilon = 1,565$ γιά ὅλους τούς τύπους)

5.18 Ἕνας κυλινδρικός κυματοδηγός μέ ἐσωτερική διάμετρο 2α=7,5 cm περιέχει ἀέρα.

α. Σέ συχνότητες κάτω ἀπό 5 GHz ποιούς κυματικούς τύπους, TE ἤ TM μπορεῖ νά μεταδώσει ὁ κυματοδηγός;

β. Πόσος εἶναι ὁ λόγος τῆς ταχύτητας τοῦ κύματος μέσα στό κυματοδηγό πρός τήν ταχύτητά του στόν ἐλεύθερο ἀέρα , στή συχνότητα $f = 1,3\ f_{op}$;

('Απ. α. TE_{11} 1,17 GHz , TE_{21} 1,97 GHz , TE_{31} 2,67 GHz
TE_{41} 3,37 GHz , TE_{51} 4,01 GHz , TE_{01} 2,45 GHz
TE_{02} 4,46 GHz , TE_{12} 3,39 GHz , TE_{22} 4,27 GHz
TM_{01} 1,52 GHz , TM_{11} 2,45 GHz , TM_{31} 4,05 GHz
TM_{41} 4,82 GHz , TM_{02} 3,51 GHz , TM_{12} 4,46 GHz
β. $\upsilon_{\varkappa}/\upsilon = 1,809$ γιά ὅλους τούς τύπους)

5.19 Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἕνας κυλινδρικός κυματοδηγός, πού ἔχει ἐσωτερική ἀκτίνα α, ἐντελῶς ἀγώγιμα τοιχώματα καί εἶναι διεγερ-

μένος στόν κυματικό τύπο TE_{11}, μεταδίδει ολική μέση ισχύ:

$$\bar{N} = \frac{\omega\mu\beta_{11}|\mathcal{H}_o|^2 \alpha^4}{82}$$

5.20 Νά προσδιορίσετε ποιός κυματικός τύπος έχει τή μικρότερη ορική συχνότητα καί πόση είναι αυτή, άν ξέρουμε τά γεωμετρικά στοιχεία τοῦ κυματοδηγοῦ καί τά ε καί μ τοῦ διηλεκτρικοῦ του.

α. Σ'έναν ορθογώνιο κυματοδηγό μέ εγκάρσιες διαστάσεις w καί d (w > d) καί

β. Σ'έναν κυκλικό κυλινδρικό κυματοδηγό μέ ακτίνα α.

(Θέμα εξετάσεων 'Ιουλίου 1977).

('Απ. α. 'Ο τύπος TE_{10} μέ $f_{op} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}\, w}$

β. 'Ο τύπος TE_{11} μέ $f_{op} = \frac{0,293}{\alpha\sqrt{\varepsilon\mu}}$)

5.21 α. Νά προσδιορίσετε τή συνάρτηση

$$\lambda_\kappa = \lambda_\kappa(\lambda_o, \lambda_{op}, \varepsilon_r, \mu_r)$$

όπου λ_κ τό μῆκος κύματος, πού έχει ένας ορισμένος κυματικός τύπος μέσα σ' έναν κυματοδηγό, λ_o τό μῆκος κύματος τῆς ίδιας συχνότητας στό κενό, χωρίς κυματοδήγηση, λ_{op} τό ορικό μῆκος κύματος τοῦ κυματοδηγοῦ γιά τόν συγκεκριμένο κυματικό τύπο καί ε_r, μ_r ή σχετική διηλεκτρική σταθερά καί ή σχετική μαγνητική διαπερατότητα τοῦ υλικοῦ, πού περιέχει ο κυματοδηγός.

β. Ἡ ορική συχνότητα γιά ορισμένο κυματικό τύπο ενός κυματοδηγοῦ, όταν αυτός είναι άδειος, είναι f_{op}=8,6 GHz. Γεμίζουμε τόν κυματοδηγό μέ διηλεκτρικό υλικό, πού έχει ε_r=2,56 καί μ_r=1 , καί κυματοδηγοῦμε τόν ίδιο κυματικό

τύπο σέ συχνότητα f = 6 GHz. Πόσο εἶναι τό μῆκος κύματος λ_κ μέσα στόν κυματοδηγό; (Θέμα ἐξετάσεων 'Οκτωβ. 1977)

('Απ. α. $$\lambda_x = \frac{\lambda_o}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r - \left(\frac{\lambda_o}{\lambda_{op}}\right)^2}}$$

β. $\lambda_x = 0{,}07$ m)

5.22 Ἕνα ὀρθογώνιο ἠλεκτρομαγνητικό ἀντηχεῖο περιέχει ἀέρα καί ἔχει διαστάσεις w = l = 8 cm καί d = 3,5 cm. Εἶναι κατασκευασμένο ἀπό χαλκό καί ἐπιχρυσωμένο ἐσωτερικά. Ἄν τό ἀντηχεῖο λειτουργεῖ στόν κυματικό τύπο TE_{101} νά προσδιοριστοῦν :

α. Ἡ συχνότητα συντονισμοῦ

β. Τό μῆκος κύματος συντονισμοῦ

γ. Ὁ συντελεστής ποιότητας Q .

(Γιά τό χρυσό εἶναι $\sigma = 4{,}1 \cdot 10^7 \ \Omega^{-1} m^{-1}$)

('Απ. α. f = 2,65 GHz

β. λ = 11,3 cm

γ. Q = 12413)

5.23 α. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ὁ συντελεστής ποιότητας Q, ἑνός ὀρθογώνιου ἠλεκτρομαγνητικοῦ ἀντηχείου πού ἔχει ἐσωτερικές διαστάσεις w, d, l καί λειτουργεῖ στόν κυματικό τύπο TE_{101} μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ ἀπό τή σχέση:

$$Q = \frac{\pi Z}{4R_S}\left[\frac{2d(w^2+l^2)^{3/2}}{wl(w^2+l^2)+2d(w^3+l^3)}\right] \qquad (1)$$

ὅπου Z ἡ κυματική ἀντίσταση τοῦ διηλεκτρικοῦ τοῦ ἀντηχείου καί R_S ἡ ἐπιδερμική ἀντίσταση τῶν τοιχωμάτων του.

β. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι στήν περίπτωση κυβικοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ ἀντηχείου εἶναι:

$$Q = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \frac{Z}{R_S} = 0,742 \frac{Z}{R_S} \qquad (2)$$

δηλ. ὁ Q εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τήν ἀκμή τοῦ κύβου.

γ. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι γιά ἕνα χάλκινο κυβικό ἀντηχεῖο μέ διηλεκτρικό τόν ἀέρα, σέ συχνότητα f = 10 GHz, εἶναι:

$$Q = 10730$$

(γιά τό χαλκό Γ_S = 0,0261 Ω, γιά τόν ἀέρα $Z \simeq Z_0$=377Ω).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6.1 Μέσα σ' ἕνα ἀραιό ἀέριο πλάσμα ὑπάρχει ἐξωτερικό σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_0$ παράλληλο πρός τόν ἄξονα z. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἄν μέσα στό πλάσμα διαδίδεται ἕνα ἠλεκτρομαγνητικό κύμα μέ κυκλική συχνότητα $\omega \gg \frac{e}{m} B_0$ ἡ συνιστώσα Hall τῆς πυκνότητας ρεύματος ($\vec{J}_H$), πού ἀναπτύσσεται, εἶναι κάθετη στό $\vec{B}_0$ καί στό διάνυσμα $\vec{E}$ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τοῦ κύματος (e, m φορτίο καί μάζα τοῦ ἠλεκτρονίου ἀντίστοιχα) .

Λ ύ σ η

τό μέγεθος
$$\omega_g = \frac{e}{m} B_0 \qquad (1)$$

εἶναι ἡ γυρομαγνητική συχνότητα τοῦ πλάσματος .

Ὅταν $\omega \gg \omega_g$ (ὅπως συμβαίνει ἐδῶ) ὁ τανυστής τῆς εἰδικῆς ἀγωγιμότητας τοῦ πλάσματος ἔχει τή συνιστώσα:

$$\bar{\bar{\sigma}}_H = \frac{j\sigma_0 \omega_g}{\omega} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

πού ἐκφράζει τό φαινόμενο Hall , ὅπου:

$$\sigma_0 = -j \frac{Ne^2}{\omega m} \qquad (3)$$

Ἡ συνιστῶσα Hall τῆς πυκνότητας ρεύματος εἶναι:

$$\vec{J}_H = \vec{\mathcal{J}}_H \, e^{j\omega t} \qquad (4)$$

μέ
$$\vec{\mathcal{J}}_H = \bar{\bar{\sigma}}_H \vec{\mathcal{E}} = j\frac{\sigma_0 \omega_g}{\omega}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = j\frac{\sigma_0 \omega_g}{\omega}\begin{bmatrix} \mathcal{E}_y \\ -\mathcal{E}_x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Ὥστε ἡ $\vec{J}_H$ δέν ἔχει z-συνιστῶσα, εἶναι δηλαδή κάθετη στόν ἄξονα z, ἐπομένως καί στό $\vec{B}_0$.

Σχηματίζοντας τό ἐσωτερικό γινόμενο $\vec{\mathcal{J}}_H \cdot \vec{\mathcal{E}}$ ἔχουμε:

$$\vec{\mathcal{J}}_H \cdot \vec{\mathcal{E}} = \left[\vec{\mathcal{J}}_H\right]^T \left[\vec{\mathcal{E}}\right] = j\frac{\sigma_0 \omega_g}{\omega}\begin{bmatrix} \mathcal{E}_y & -\mathcal{E}_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} =$$
$$= j\frac{\sigma_0 \omega_g}{\omega}(\mathcal{E}_y \mathcal{E}_x - \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y) = 0$$

Ὥστε ἡ $\vec{J}_H$ εἶναι κάθετη καί στό πεδίο $\vec{E}$ τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος .

6.2 Ἕνα ἀραιό ἀέριο πλάσμα ἔχει ἠλεκτρονική πυκνότητα N.

α. Μέ πόση ταχύτητα υ διαδίδεται μέσα σ' αὐτό ἕνα ἐπίπεδο ἠλεκτρομαγνητικό κύμα, μέ κυκλική συχνότητα ω ἀρκετά μεγαλύτερη ἀπό τή χαρακτηριστική κυκλική συχνότητα τοῦ πλάσματος;

β. Στήν περίπτωση ἑνός διαμορφωμένου κύματος ἐνδιαφέρει τόσο ἡ ταχύτητα φάσης ὅσο καί ἡ ταχύτητα ὁμάδας. Ἄν τό παραπάνω κύμα διαμορφωθεῖ , πόση θά εἶναι ἡ ταχύτητα φάσης καί πόση ἡ ταχύτητα ὁμάδας ;

Λ ύ σ η

α. Ἡ συχνότητα πλάσματος f_p καί ἡ πυκνότητα N σχετίζονται μέ τήν ἐξίσωση (σύστημα SI) :

$$f_p = 9\sqrt{N} \qquad (1)$$

Ἑπομένως $$\omega_p = 18\pi\sqrt{N} \quad (2)$$

Ἡ διηλεκτρική σταθερά τοῦ πλάσματος (ἀπουσία μαγνητικοῦ πεδίου) εἶναι:

$$\varepsilon = \varepsilon_o\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \varepsilon_o\left(1 - \frac{324\,\pi^2 N}{\omega^2}\right) \quad (3)$$

Ἡ ταχύτητα υ τοῦ ΗΜ κύματος εἶναι:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_o}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{324\pi^2 N}{\omega^2}}} \quad (4)$$

β. Ἡ σταθερά φάσης τοῦ κύματος εἶναι:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{324\,\pi^2 N}{\omega^2}} \quad (5)$$

Ἡ ταχύτητα φάσης υ_p εἶναι:

$$\upsilon_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{324\pi^2 N}{\omega^2}}} = \upsilon \quad (6)$$

Γράφουμε τήν (5) μέ τή μορφή :

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{324\,\pi^2\,N}{c^2} \quad (7)$$

ὁπότε ἡ ταχύτητα ὁμάδας υ_g προκύπτει μέ τήν παραγώγιση τῆς (7)

$$2\beta d\beta = \frac{2\omega}{c^2}d\omega \qquad \text{ἀπό ὅπου} \quad \upsilon_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\beta c^2}{\omega} = \frac{c^2}{\upsilon} \quad (8)$$

καί χρησιμοποιώντας ἔχουμε: $$\upsilon_g = c\sqrt{1-\frac{324\,\pi^2 N}{\omega^2}} \quad (9)$$

6.3 Ὁ τανυστής τῆς σχετικῆς διηλεκτρικῆς σταθερᾶς ἑνός ἀραιοῦ καί ψυχροῦ ἀέριου πλάσματος, παρουσία μαγνητικοῦ πεδίου μέ ἔνταση $\vec{B}_o = B_o\hat{z}$, προκύπτει ἀπό τή σχέση (6-32) .
Νά προσδιορίσετε τή σταθερά φάσης β τοῦ ἐπίπεδου κύματος:

$$\vec{\mathcal{E}}(z,t) = \vec{\mathcal{E}}_o\, e^{j(\omega t-\beta z)} = \vec{\mathcal{E}}\, e^{j\omega t} \quad (1)$$

πού διαδίδεται μέσα στό πλάσμα καί νά άποδείξετε ὅτι τό κύμα αὐτό γιά νά διαδίδεται πρέπει νά εἶναι κυκλικά πολωμένο, δεξιόστροφα ἤ ἀριστερόστροφα (βλ καί Κεφ. 7 θεωρίας γιά τήν κυκλική πόλωση) .

Λ ύ σ η

Ξέρουμε ἀπό τή θεωρία ὅτι ἄν τό κύμα διαδίδεται, γενικά , ὑπό γωνία ϑ ὡς πρός τόν ἄξονα z, ἡ λύση τῆς ἐξίσωσης διασπορᾶς δίνει τή σταθερά φάσης β τῆς σχέσης (6-66) .
Στήν περίπτωσή μας τό κύμα διαδίδεται κατά τόν ἄξονα z, εἶναι δηλ. $\vartheta=0$ καί ἡ (6-66) γίνεται :

$$\beta^2=\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}\pm\sqrt{4\varepsilon_{12}^2\varepsilon_{33}^2}}{2\varepsilon_{33}}=\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{2\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}\pm 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{33}}{2\varepsilon_{33}}=\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_{11}\pm\varepsilon_{12}) \qquad (2)$$

Ὥστε:

$$\beta=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{11}\pm\varepsilon_{12}} \qquad (3)$$

παίρνοντας τά ε_{11} καί ε_{12} ἀπό τήν (6-32) ἔχουμε:

$$\beta^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_g^2}\mp\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega}\,\omega_g}{\omega^2-\omega_g^2}\right)=\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\frac{\omega_p^2(\omega\pm\omega_g)}{\omega}}{\omega^2-\omega_g^2}\right)$$

ἤ

$$\beta^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega}}{\omega\mp\omega_g}\right) \qquad (4)$$

Ἀπό τή θεωρία ξέρουμε ὅτι, στή γενική περίπτωση πού : $\vartheta\neq 0^\circ, 90^\circ$, τό φασικό ἠλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathcal{E}}$ τοῦ κύματος πρέπει νά ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\beta^2\cos^2\vartheta & -j\varepsilon_{12} & \left(\frac{c}{\omega}\right)^2\beta^2\sin\vartheta\cos\vartheta\\ j\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\beta^2 & 0\\ \left(\frac{c}{\omega}\right)^2\beta^2\sin\vartheta\cos\vartheta & 0 & \varepsilon_{33}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\beta^2\sin^2\vartheta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathcal{E}_x\\ \mathcal{E}_y\\ \mathcal{E}_z\end{bmatrix}=0 \qquad (5)$$

Ἡ (5) γιά $\vartheta=0°$ γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\beta^2 & j\varepsilon_{12} & 0 \\ -j\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}-\left(\frac{c}{\omega}\right)^2\beta^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = 0 \tag{6}$$

παίρνοντας τά ε_{11} καί ε_{12} ἀπό τήν (6-32) καί τό β^2 ἀπό τήν (4) ἔχουμε:

$$\begin{bmatrix} \not{1}-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_g^2}-\not{1}+\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega}}{\omega\mp\omega_g} & j\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega}\omega_g}{\omega^2-\omega_g^2} & 0 \\ -j\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega}\omega_g}{\omega^2-\omega_g^2} & \not{1}-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_g^2}-\not{1}+\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega}}{\omega\mp\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = 0 \tag{7}$$

Ἀλλά οἱ δύο πρῶτοι διαγώνιοι ὅροι γράφονται:

$$\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega}(\omega\mp\omega_g)+\omega_p^2}{\omega^2-\omega_g^2} = \pm\frac{\frac{\omega_p^2}{\omega}\omega_g}{\omega^2-\omega_g^2} = \mp\varepsilon_{12} \tag{8}$$

Ὥστε ἡ (7) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \mp\varepsilon_{12} & j\varepsilon_{12} & 0 \\ -j\varepsilon_{12} & \mp\varepsilon_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = 0 \tag{9}$$

Ἀπό τήν (9) προκύπτει ὅτι:

$$\mathcal{E}_z = 0 \tag{10}$$

καί ὅτι:

$$\mp\varepsilon_{12}\,\mathcal{E}_x + j\,\varepsilon_{12}\,\mathcal{E}_y = 0 \tag{11}$$

ἤ ὅτι:

$$\mathcal{E}_y = \mp j\,\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x\, e^{\mp j\frac{\pi}{2}} \tag{12}$$

Οἱ (10) καί (12) ἐκφράζουν ὅτι τό ἠλεκτρικό πεδίο τοῦ κύματος βρίσκεται στό ἐπίπεδο xy καί ὅτι οἱ συνιστῶσες του $\mathcal{E}_y$ καί $\mathcal{E}_x$ ἔχουν ἴσα πλάτη ἀλλά διαφορά φάσης $\pm \frac{\pi}{2}$, δηλαδή τό κύμα εἶναι κυκλικά πολωμένο, δεξιόστροφα ἤ ἀριστερόστροφα.

6.4 Στό ἀέριο πλάσμα τοῦ προηγούμενου προβλήματος νά ἐξετάσετε τή διάδοση ἐπίπεδου ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος κατά τή διεύθυνση $\hat{x}$ (ἐγκάρσια διάδοση) ὅταν ω ἀρκετά μεγαλύτερη ἀπό τήν ω_g.

α. Νά δώσετε τή σταθερά φάσης τῆς τακτικῆς ἀκτίνας καί νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκτίνα αὐτή εἶναι γραμμικά πολωμένη κατά τόν ἄξονα z.

β. Νά δώσετε τή σταθερά φάσης τῆς ἔκτακτης ἀκτίνας καί νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκτίνα αὐτή εἶναι γραμμικά πολωμένη κατά τή διεύθυνση $\hat{y}$ καί ἐπιπλέον ἔχει συνιστῶσα $\mathcal{E}_x \neq 0$.

Λ ύ σ η

α. Γιά τήν τακτική ἀκτίνα εἶναι:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{11}} \tag{1}$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωση, πού μᾶς δίνει τίς λύσεις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου γιά $\vartheta = 90°$, παίρνει τή μορφή (βλ. καί σχέση (5) στό προηγούμενο πρόβλημα) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & -j\varepsilon_{12} & 0 \\ j\varepsilon_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

Ἀπό τήν (2) προκύπτουν οἱ σχέσεις :

$$\mathcal{E}_z \neq 0 \tag{3}$$

$$j\varepsilon_{12}\mathcal{E}_x = 0 \tag{4}$$

$$\varepsilon_{11}\mathcal{E}_x - j\varepsilon_{12}\mathcal{E}_y = 0 \tag{5}$$

'Από τήν (4) καί τήν (5) έχουμε:

$$\mathcal{E}_x = 0 \quad , \quad \mathcal{E}_y = 0 \tag{6}$$

Ὥστε, υπάρχει μόνο z-συνιστῶσα καί ή τακτική ἀκτίνα εἶναι γραμμικά πολωμένη κατά τή διεύθυνση $\hat{z}$, παράλληλα δηλ. πρός τό $\vec{B}_o$.

β. Γιά τήν έκτακτη ἀκτίνα εἶναι:

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_{11}^2 - \varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{11}}} \tag{7}$$

ὁπότε ή εξίσωση πού μᾶς δίνει τίς λύσεις τοῦ πεδίου εἶναι :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & -j\varepsilon_{12} & 0 \\ j\varepsilon_{12} & +\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = 0 \tag{8}$$

'Από τήν (8) προκύπτουν οί σχέσεις:

$$\mathcal{E}_z = 0 \tag{9}$$

$$\varepsilon_{11}\mathcal{E}_x - j\varepsilon_{12}\mathcal{E}_y = 0 \tag{10}$$

$$j\varepsilon_{12}\mathcal{E}_x + \frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{11}}\mathcal{E}_y = 0 \tag{11}$$

Οἱ (10) καί (11) ταυτίζονται καί δίνουν:

$$\mathcal{E}_y = -\frac{j\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}}\mathcal{E}_x \tag{12}$$

ἀλλά γιά ω ἀρκετά μεγαλύτερη ἀπό τήν ω_g εἶναι:

$$\varepsilon_{11} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \text{καί} \qquad \varepsilon_{12} = \frac{-\omega_p^2\,\omega_g}{\omega^3} \tag{13}$$

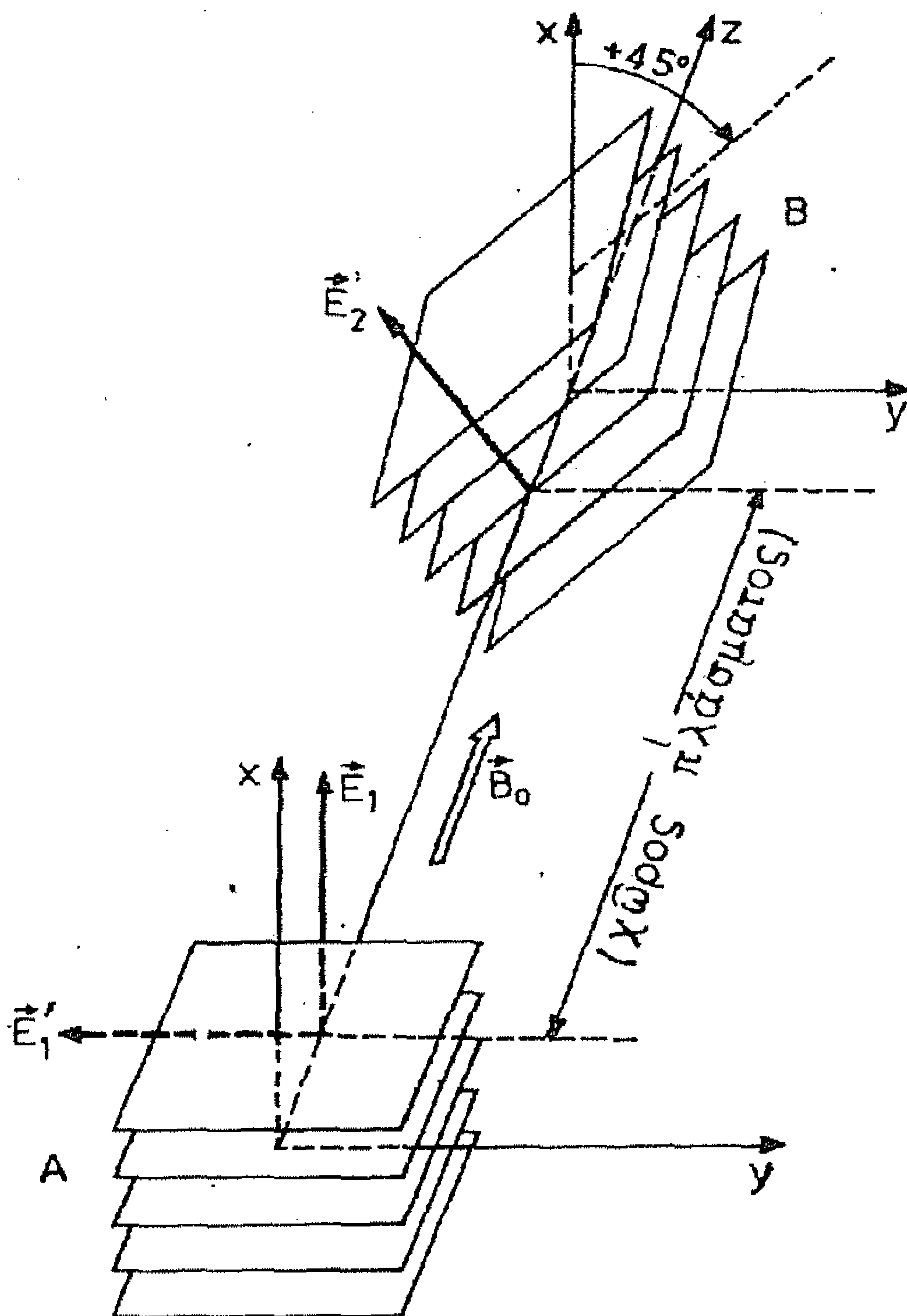
Δηλαδή :
$$\mathcal{E}_y = j\,\frac{1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}{\dfrac{\omega_p^2\,\omega_g}{\omega^3}}\,\mathcal{E}_x = j\,\frac{\omega^3-\omega_p^2\,\omega}{\omega_p^2\,\omega_g}\,\mathcal{E}_x \qquad (14)$$

Ὥστε,στό ἐπίπεδο yz (τό ἐγκάρσιο στή διάδοση) τό πεδίο ἔχει μόνο τή συνιστῶσα $\mathcal{E}_y$ εἶναι δηλ. γραμμικά πολωμένο κατά τή διεύθυνση $\hat{y}$.Τονίζουμε ὅμως ὅτι ἐμφανίζεται καί μιά συνιστῶσα $\mathcal{E}_x \neq 0$ καί μάλιστα μέ διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$ ἀπό τήν $\mathcal{E}_y$.

Ἔτσι τό ὁλικό πεδίο $\vec{\mathcal{E}}$ βρίσκεται σέ ἐπίπεδο πού περιέχει τή διεύθυνση διάδοσης $\hat{x}$.

6.5 Ἡ διάταξη τοῦ σχήματος περιλαμβάνει μιά περιοχή ἑνός ἀραιοῦ ἀέριου πλάσματος,μέσα σέ σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_o = B_o\hat{z}$. Στήν ἀρχή Α τῆς διάταξης (μπροστά ἀπό τό πλάσμα) ὑπάρχει ἕνα σύστημα Α ἀπό ἀγώγιμα ἐπίπεδα,παράλληλα πρός τό ἐπίπεδο yz καί σέ ἀπόσταση d τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο.

Στό τέλος Β τῆς διάταξης (πίσω ἀπό τό πλάσμα) ὑπάρχει ἕνα ὅμοιο σύστημα ἐπιπέδων Β, στραμμένο ὅμως γύρω ἀπό τόν ἄξονα z, ἔτσι πού νά σχηματίζουν γωνία $+45^o$ μέ τό ἐπίπεδο xz .



α. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι N ἡ πυκνότητα τῶν ἠλεκτρονίων τοῦ πλάσματος, σταθερή σ' ὅλη τήν περιοχή τοῦ πλάσματος , καί l τό συνολικό μῆκος τῆς διαδρομῆς .

Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ τιμή B_0 τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, ὥστε ἕνα γραμμικά πολωμένο ἐπίπεδο κύμα νά περνᾶ ἐλεύθερα ἀπό ὅλη τή διάταξη;Δηλ. ἡ B_0 πρέπει νά εἶναι τέτοια , ὥστε ἡ στροφή Faraday πού θά ὑποστεῖ ἕνα ἐπίπεδο κύμα :

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \hat{x} e^{j(\omega t - kz)} \qquad (1)$$

πού πέφτει πάνω στό σύστημα A, κατά τή διαδρομή του ὥς τό B, νά εἶναι - 45^o (βλ. Πρόβλ. 5.3)

β. Στό ἄκρο B τῆς διάταξης πέφτει τό ἐπίπεδο κύμα:

$$\vec{E}(z,t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y}) e^{j(\omega t + kz)} \qquad (2)$$

πῶς θά συμπεριφερθεῖ ἡ διάταξη, ἄν ἡ ἀπόσταση d τῶν ἐπιπέδων ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη:

$$d < \frac{\lambda}{2} \qquad (3)$$

Συνοψίστε τά συμπερασματά σας γιά τή συμπεριφορά τῆς διάταξης, πού μελετήθηκε.

Λ ύ σ η

α. Τό κύμα (1) εἶναι πολωμένο κάθετα στά ἐπίπεδα A καί ἐπομένως περνᾶ ἐλεύθερα μέσα ἀπό αὐτά (βλ. πρόβλ.5.3) Ἡ διάδοση μέσα στό μαγνητόπλασμα εἶναι διαμήκης, δηλαδή γίνεται παράλληλα πρός τό μαγνητικό πεδίο B_0 ($\vartheta = 0$) . Ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τή θεωρία, γιά τή στοιχειώδη διαδρομή $dl = dz$ ἡ στροφή Faraday τοῦ ἐπιπέδου πόλωσης τοῦ κύματος εἶναι* :

$$d\Phi = -\frac{Ne^3 B_0}{8\pi^2 c\, \varepsilon_0\, m^2 f^2} dl = \frac{-Ne^3 B_0}{8\pi^2 c\, \varepsilon_0\, m^2 f^2} dl \qquad (4)$$

---

*Τό πρόσημο "πλήν" χρειάζεται γιατί στό σύστημα ἀξόνων τοῦ σχήματος οἱ ἄξονες y καί z ἔχουν ἀντίθετες φορές ἀπό τούς ἀντίστοιχους ἄξονες πού χρησιμοποίησε ὁ Faraday.

'Αφοῦ B_o = σταθ. καί N = σταθ. , γιά ὅλο τό μῆκος l τῆς διαδρομῆς θά ἔχουμε :

$$\Phi = -\frac{Ne^3 B_o l}{8\pi^2 c\varepsilon_o m^2 f^2} \qquad (5)$$

θέτοντας $$\Phi = -\frac{\pi}{4} \qquad (6)$$

ἔχουμε $$B_o = \frac{2\pi^3 c\,\varepsilon_o m^2 f^2}{Ne^3 l} \qquad (7)$$

β. Ἡ διάδοση τοῦ κύματος (2) εἶναι δυνατή μέσα ἀπό τά ἐπίπεδα B γιατί αὐτό εἶναι πολωμένο ὑπό γωνία α .

$$\alpha \triangleq \arctan\frac{E_y}{E_x} = \arctan\frac{-\frac{E_o}{\sqrt{2}}\cos(\omega t+kz)}{\frac{E_o}{\sqrt{2}}\cos(\omega t+kz)} = \arctan(-1) = -45^\circ \qquad (8)$$

δηλ. εἶναι πολωμένο κάθετα πρός τά ἐπίπεδα.
Ἡ διάδοση τοῦ κύματος (2) μέσα στό πλάσμα εἶναι διαμήκης μέ γωνία $\vartheta = 180^o$ ὡς πρός τό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_o$.
Ἡ στοιχειώδης στροφή Faraday σ' αὐτή τήν περίπτωση δίνεται ἀπό τήν (4) ἀλλά μέ ἀντίθετο πρόσημο, καί μέ $dl = -dz$ γιατί τό κύμα διαδίδεται κατά τή διεύθυνση $-\hat{z}$, ὁπότε :

$$d\Phi' = \frac{Ne^3 B_o}{8\pi^2 c\,\varepsilon_o m^2 f^2} dl = -\frac{Ne^3 B_o}{8\pi^2 c\,\varepsilon_o m^2 f^2} dz \qquad (9)$$

Ὁλοκληρώνοντας γιά ὅλο τό μῆκος l ἔχουμε:

$$\Phi' = -\frac{Ne^3 B_o l}{8\pi^2 c\varepsilon_o m^2 f^2} \qquad (10)$$

καί παίρνοντας ἀπό τήν (7) τήν τιμή τοῦ B_o ἔχουμε :

$$\Phi' = -\frac{\pi}{4} \qquad (11)$$

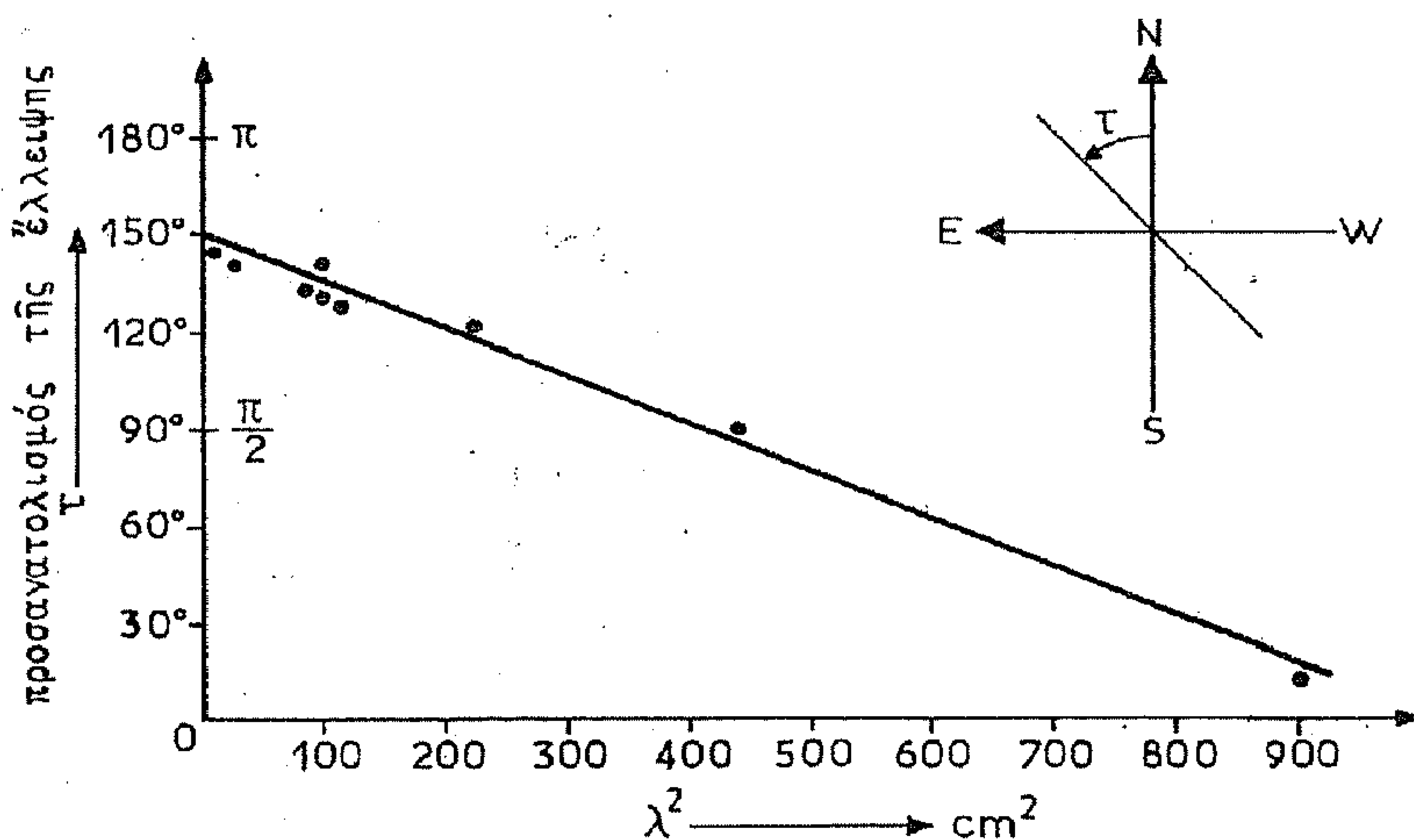
Ὥστε ὅταν τό κύμα φτάνει στά ἐπίπεδα A ἔχει πόλωση μέ γωνία:

$$\alpha+\Phi'=-45°-45°=-90° \qquad (12)$$

εἶναι δηλαδή πολωμένο κατά τόν ἄξονα y, δηλαδή παράλληλα μέ τά ἐπίπεδα A καί ἀφοῦ $d<\frac{\lambda}{2}$ δέν περνᾶ ἀνάμεσά τους, ἀλλά ἀνακλᾶται.

Σ υ μ π έ ρ α σ μ α : Ἡ διάταξη τοῦ σχήματος, μέ τίς προϋποθέσεις (3) καί (7), εἶναι μονοκατευθυντική στή διάδοση γραμμικά πολωμένου κύματος, δηλαδή δρᾶ σάν ἀπομονωτής, γιά τόν ὁποῖο δέν ἰσχύει ἡ ἀρχή τῆς ἀντίστροφης πορείας τοῦ ΗΜ-κύματος.
Σημειώνεται ὅτι μιά τέτοια διάταξη ἀντί γιά ἀέριο πλάσμα μπορεῖ νά ἔχει σάν ἐνεργό ὑλικό ἕνα κομμάτι φερρίτη.

6.6 Διάφοροι ἐρευνητές ἔκαμαν μετρήσεις τῆς πόλωσης τῶν ραδιοκυμάτων, πού ἐκπέμπει ὁ ραδιαστέρας Taurus A (νεφέλωμα τοῦ Καρκίνου). Μερικά ἀπό τά ἀποτελέσματά τους συνοψίζονται στό πιό κάτω σχῆμα μέ τή μορφή διαγράμματος τῆς γωνίας τ, πού σχηματίζει ὁ μεγάλος ἄξονας τῆς ἔλλειψης τῆς πόλωσης μέ τό Βορρά, σέ συνάρτηση μέ τό τετράγωνο τοῦ μήκους κύματος (λ^2) τῆς ἀκτινοβολίας.



"Αν ἡ διάδοση θεωρηθεῖ "σχεδόν διαμήκης", δηλ. ὁ ἄξονάς της σχηματίζει πολύ μικρή γωνία ϑ μέ τό ὁλικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ (τῆς γῆς καί τοῦ διαστρικοῦ χώρου).

α. Νά προσδιορίσετε τήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας τοῦ σχήματος.

β. Νά δώσετε τή θεωρητική της ἐξήγηση καί νά προσδιορίσετε τίς ἐκφράσεις καί τή σημασία τῶν σταθερῶν συντελεστῶν της. (Θέμα 'Εξετάσεων 'Ιουλ. 1977)

('Απ. α. $\tau = 2,62 - 26,2\ \lambda^2$ (τό λ σέ m, τό τ σέ rad)

β. 'Η σταθερά 2,62 rad = $150^o \equiv \tau_o$ εἶναι ὁ προσανατολισμός τῆς ἔλλειψης τῆς πόλωσης τοῦ κύματος στό ξεκίνημά του ἀπό τόν ραδιαστέρα, ἐνῶ ἡ κλίση $K \equiv -26,2 \frac{rad}{m^2}$ χαρακτηρίζει τή διαδρομή τοῦ κύματος καί τίς συνθῆκες μαγνητικοῦ πεδίου πού ἔχει ὑποστεῖ ὥσπου νά φτάσει στή γῆ).

6.7 Θεωρεῖται γνωστός ὁ τύπος (γιά διαμήκη διάδοση).

$$\Phi_{rad} = \frac{2,36 \cdot 10^{-3}}{f^2_{MHz}} \int_0^l N_{n\lambda/cm^3}\ B_{Gauss} dl_{cm}$$

α. Δεῖξτε ὅτι στήν περίπτωση, πού ἕνας παρατηρητής κάνει λήψη, μ' ἕνα δίπολο, τοῦ σήματος ἑνός τεχνητοῦ δορυφόρου πού πλησιάζει ἤ ἀπομακρύνεται ἀπ' αὐτόν κατά διεύθυνση περίπου παράλληλη πρός τό γήϊνο μαγνητικό πεδίο B, θά παρατηρεῖ ἕνα ἰσχυρό "fading" (αὐξομείωση στήν ἔνταση τοῦ σήματος) πού δέν θά ὀφείλεται σέ στροφή τοῦ δορυφόρου ἀλλά στό φαινόμενο Faraday.

β. Βοῆτε τόν τύπο πού συνδέει τό $\frac{d\Phi}{dt}$ μέ τήν ταχύτητα $\upsilon = \frac{dl}{dt}$ τοῦ δορυφόρου καί

γ. Ὑπολογίστε τή μέση ἠλεκτρονική πυκνότητα τῆς ἰονόσφαιρας ἄν γνωρίζουμε ὅτι παρατηροῦνται τρία fading ἀνά λεπτό στούς 108 MHz ἀπό ἕνα δορυφόρο πού εἶναι γνωστό ὅτι κινεῖται μέ 7 km/sec, ὡς πρός τόν παρατηρητή, παράλληλα στό μαγνητικό πεδίο B = 1 Gauss .
(Θέμα ἐξετάσεων Ὀκτωβρ. 1976)

('Απ. β. $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{Ne^3 B_o \dot{v}}{8\pi^2 c\, \varepsilon_o m^2 f^2}$ γ. $N = 1{,}1 \cdot 10^{11}\, m^{-3}$)

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 7

7.1 Δίνεται τό διάνυσμα Stokes $[s_i]$ ἑνός ἠλεκτρομαγνητικοῦ κύματος, ὁλικά πολωμένου :

$$[s_i] = \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix}$$

Ξέροντας αὐτό καί μόνο νά διατυπώσετε σχέσεις προσδιορισμοῦ :

α. Τῆς μέγιστης ἰσχύος ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας, πού μεταφέρει τό κύμα.

β. Τοῦ πλάτους κάθε ἐγκάρσιας συνιστώσας (x,y)

γ. Τῆς γωνίας, πού σχηματίζει κάθε ἄξονας τῆς ἔλλειψης , πού χαρακτηρίζει τήν πόλωση, μέ τόν ἄξονα x .

δ. Τοῦ σημείου (ε,τ) πού παριστάνει τήν πόλωση πάνω στή σφαίρα τοῦ Poincaré .

ε. Τῶν ἄλλων δύο παραμέτρων (γ,δ), πού ἀντιστοιχοῦν στό προηγούμενο σημεῖο, καί

στ. Τοῦ ἀξονικοῦ πηλίκου τῆς ἔλλειψης, πού χαρακτηρίζει τήν πόλωση.

Λ ύ σ η

α. Ἔστω S_x καί S_y ἡ ἰσχύς ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας πού μεταφέρει ἡ ἀντίστοιχη ἐγκάρσια συνιστώσα. Ξέρουμε ὅτι ἡ παράμετρος I ὁρίζεται :

$$I \triangleq S_x + S_y = S \qquad (1)$$

Ὥστε:

$$\boxed{S = I} \qquad (2)$$

β. Ἀπό τήν (1) καί ἀπό τήν

$$Q \triangleq \frac{E_{xo}^2}{Z} - \frac{E_{yo}^2}{Z} = S_x - S_y \qquad (3)$$

προκύπτουν εὔκολα οἱ σχέσεις:

$$\boxed{E_{xo} = \sqrt{\frac{Z(I+Q)}{2}}} \qquad (4)$$

$$\boxed{E_{yo} = \sqrt{\frac{Z(I-Q)}{2}}} \qquad (5)$$

γ. Εἶναι:

$$U \triangleq Q \tan 2\tau \qquad (6)$$

ὅπου τ ἡ γωνία πού σχηματίζει ὁ μεγάλος ἄξονας τῆς ἐλλειψης μέ τόν ἄξονα x . Ἄν τ_1 εἶναι ἡ ἀντίστοιχη γωνία τοῦ μικροῦ ἄξονα, εἶναι :

$$\boxed{\tau = \frac{1}{2} \text{arc tan} \frac{U}{Q}} \qquad (7)$$

καί

$$\boxed{\tau_1 = \tau + \frac{\pi}{2}} \qquad (8)$$

δ. Ἀπό τή γνωστή σχέση :

$$V = S \sin 2\varepsilon = I \sin 2\varepsilon \qquad (\;\;)$$

καί τήν (7) προκύπτει:

$$\boxed{(\varepsilon,\tau) = \left(\frac{1}{2} \text{arc sin} \frac{V}{I} \;,\; \frac{1}{2} \text{arc tan} \frac{U}{Q} \right)} \qquad (10)$$

δηλ. ή παράμετρος ε έχει τό πρόσημο τῆς V .

ε. Ἡ παράμετρος γ προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση ὁρισμοῦ της

$$\tan\gamma = \frac{E_{yo}}{E_{xo}} \tag{11}$$

καί ἀπό τίς (4) καί (5) . Εἶναι δηλαδή:

$$\boxed{\tan\gamma = \sqrt{\frac{I-Q}{I+Q}}} \tag{12}$$

Τήν παράμετρο δ, πού εἶναι ή διαφορά φάσης ἀνάμεσα στίς δύο ἐγκάρσιες συνιστῶσες, μποροῦμε νά προσδιορίσουμε ἀπό τή γνωστή σχέση:

$$\sin\delta = \frac{\sin 2\epsilon}{\sin 2\gamma} \tag{13}$$

πού γράφεται καί:

$$\sin^2\delta = \frac{\sin^2 2\epsilon}{4\sin^2\gamma\cos^2\gamma} = \frac{\sin^2 2\epsilon}{4\,\dfrac{\tan^2\gamma}{1+\tan^2\gamma}\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2\gamma}}$$

Χρησιμοποιώντας τίς (9) καί (12) ἔχουμε:

$$\sin^2\delta = \frac{\dfrac{V^2}{I^2}}{4\,\dfrac{\dfrac{I-Q}{I+Q}}{\left[1+\dfrac{I-Q}{I+Q}\right]^2}} = \frac{\dfrac{V^2}{I^2}\cdot\dfrac{(2I)^2}{I+Q}}{4(I-Q)} = \frac{V^2}{I^2-Q^2}$$

ή

$$|\sin\delta| = \sqrt{\frac{V^2}{I^2-Q^2}} \tag{14}$$

ὅπως φαίνεται ἀπό τή (13) ή δ ἔχει τό πρόσημο τῆς ε , δηλ. τό πρόσημο τῆς παραμέτρου V ὥστε :

$$\boxed{\delta = \arc\sin\frac{V}{\sqrt{I^2-Q^2}}} \tag{15}$$

στ. Τό άξονικό πηλίκο (ΑΠ) εἶναι :

$$\boxed{\text{ΑΠ} = \left|\cot \varepsilon\right|} \qquad (16)$$

ὅπου τό ε τό ἔχουμε ἀπό τή (10)

7.2 Μιά δέσμη LASER, ἐλλειπτικά πολωμένη, περνᾶ μέσα ἀπό ἕνα πλακίδιο λ/4 κι' ἀμέσως μετά μέσα ἀπό ἕναν γραμμικό πολωτή. Τό πλακίδιο λ/4 ἔχει τόν ὀπτικό του ἄξονα (γρήγορο ἄξονα) ὑπό γωνία 30^o ἀπό τόν ὀριζόντιο ἄξονα (ἄξονα x). Περιστρέφοντας τόν πολωτή παρατηροῦμε τήν ἔξοδό του καί διαπιστώνουμε ὅτι ἡ δέσμη ἐξόδου μηδενίζεται ὅταν τό χαρακτηριστικό ἐπίπεδο τοῦ πολωτῆ σχηματίζει γωνία 60^o μέ τόν ὀριζόντιο ἄξονα x .

Ἄν ἡ ἔνταση τῆς ἀρχικῆς δέσμης LASER εἶναι

$$I_1 = 1\ \text{kw/m}^2$$

νά προσδιοριστοῦν :

α. Τό διάνυσμα Stokes τῆς δέσμης πού βγαίνει ἀπό τό πλακίδιο λ/4 σέ συνάρτηση μέ ἐκεῖνο πού μπαίνει.

β. Τά χαρακτηριστικά τῆς ἔλλειψης πόλωσης τῆς ἀρχικῆς δέσμης (δηλ. προσανατολισμός καί ΑΠ) .

γ. Ἡ διαφορά φάσης δ πού ὑπάρχει ἀνάμεσα στίς δύο ἐγκάρσιες συνιστῶσες τῆς ἀρχικῆς δέσμης.

Λύση

α. Ἄς ποῦμε ὅτι τό διάνυσμα Stokes τῆς ἀρχικῆς δέσμης LASER εἶναι:

$$[S_i]_1 = \begin{bmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ὅπου $I_1 = 1\ \text{kW/m}^2$

Τό διάνυσμα Stokes στήν ἔξοδο τοῦ πλακιδίου λ/4 θά εἶναι :

$$\left[S_i\right]_2 = \left[M_{ij}\right]_{\lambda/4} \left[S_i\right]_1 \qquad (2)$$

ὅπου $\left[M_{ij}\right]_{\lambda/4}$ ἡ μήτρα Mueller τοῦ πλακιδίου λ/4 προσανατολισμένου κατά 30^o ὡς πρός τόν ἄξονα x.

'Από τόν πίνακα 7-III ἔχουμε :

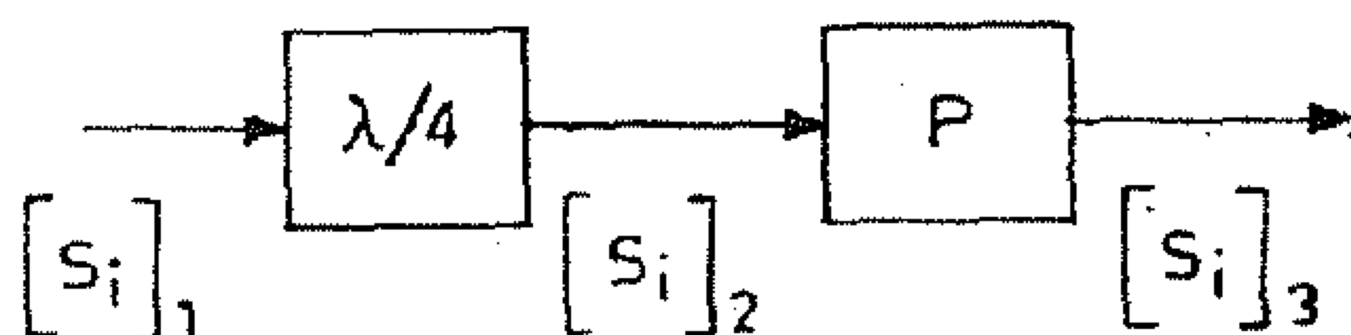
$$\left[M_{ij}\right]_{\lambda/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & \sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Ὥστε:

$$\left[S_i\right]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & \sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \frac{1}{4}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}U_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}V_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}Q_1 + \frac{3}{4}U_1 + \frac{1}{2}V_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}Q_1 - \frac{1}{2}U_1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

β. 'Αφοῦ μετά τόν πολωτή ἡ δέσμη μηδενίζεται ὅταν αὐτός τοποθετηθεῖ σέ γωνία 60^o συμπεραίνουμε ὅτι ἡ δέσμη $\left[S_i\right]_2$ εἶναι γραμμικά πολωμένη ὑπό γωνία :

$$60^o + 90^o = 150^o$$



Θά πρέπει λοιπόν νά εἶναι :

$$\left[S_i\right]_2 = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_2\cos(300^o) \\ I_2\sin(300^o) \\ 0 \end{bmatrix} = I_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

'Από τίς (4) καί (5) καί ἀφοῦ $I_2 = I_1 = 1\ kW/m^2$ ἔχουμε τό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}U_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}V_1 &= \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}Q_1 + \frac{3}{4}U_1 + \frac{1}{2}V_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}Q_1 - \frac{1}{2}U_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

'Από τή λύση τοῦ συστήματος (6) προκύπτει:

$$Q_1 = -\frac{1}{4}, \quad U_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad V_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{7}$$

"Ωστε, τό ἀρχικό διάνυσμα Stokes εἶναι:

$$[S_i]_1 = \begin{bmatrix} I_1 \\ Q_1 \\ U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \tag{8}$$

'Ο μεγάλος ἄξονας τῆς ἔλλειψης σχηματίζει μέ τόν ἄξονα x γωνία τ

$$\tau = \frac{1}{2}\arctan\frac{U_1}{Q_1} = \frac{1}{2}\arctan\sqrt{3} = \frac{1}{2}60° = 30°$$

"Ωστε
$$\boxed{\tau = 30°} \tag{9}$$

Τό ἀξονικό πηλίκο εἶναι:

$$A\Pi = |\cot\varepsilon| \tag{10}$$

ὅπου
$$\sin 2\varepsilon = \frac{V_1}{I_1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{11}$$

'Από τήν (11) ἔχουμε $2\varepsilon = -60^o$ ἤ $\varepsilon = -30^o$ (12)

καί
$$\boxed{A\Pi = \sqrt{3}} \tag{13}$$

γ. 'Η διαφορά φάσης δ προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση:

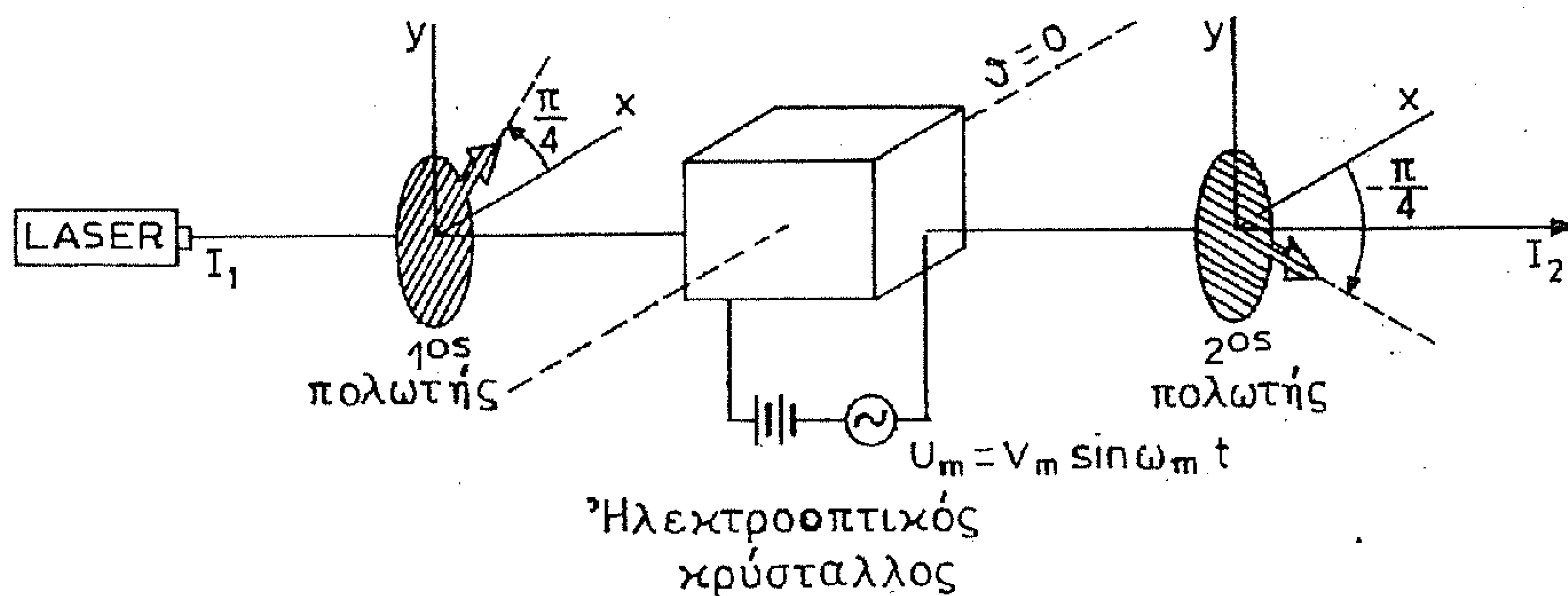
$$\sin\delta = \frac{V_1}{\sqrt{I_1^2 - Q_1^2}} \tag{14}$$

ἤ
$$\sin\delta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}} = -0,894 \tag{15}$$

καί
$$\boxed{\delta = -63,43°}$$

ἤ
$$\boxed{\delta = -63° 26'} \tag{16}$$

7.3 Μιά δέσμη LASER, στήν ἀρχή ἐντελῶς ἀπόλωτη, περνᾶ μέσα ἀπό τή διάταξη τοῦ σχήματος:



Ὁ $1^{ος}$ πολωτής σχηματίζει 45^o μέ τόν ἄξονα x, ἐνῶ ὁ $2^{ος}$ -45^o.
Ὁ ἠλεκτροοπτικός κρύσταλλος εἶναι ἕνας γραμμικός ἐπιβραδυντής, πού ἐπιβραδύνει κατά δ τή μιά κάθετη συνιστώσα ἔναντι τῆς ἄλλης. Ἡ γωνία δ σχετίζεται μέ τό σῆμα U_m μέ τή σχέση :

$$\delta = \frac{\pi}{2} + kU_m = \frac{\pi}{2} + kV_m \sin\omega_m t \qquad (1)$$

ὅπου k = σταθερά.
Ὁ γρήγορος ἄξονας τοῦ κρυστάλλου σχηματίζει γωνία $\vartheta=0$ μέ τόν ἄξονα x. Ἄν I_1 ἡ ἔνταση τῆς ἀρχικῆς δέσμης LASER

α. Νά προσδιορίσετε τή μήτρα Mueller τῆς ὀπτικῆς διάταξης .

β. Νά προσδιορίσετε τήν ἔνταση I_2 τῆς τελικῆς δέσμης καί νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ τελική δέσμη εἶναι διαμορφωμένη κατά ἔνταση μέ κυκλική συχνότητα διαμόρφωσης ω_m .
('Υπόδειξη: τό ἀνάπτυγμα sin(a sin β) νά τό πάρετε ἀπό τό σχετικό πίνακα τῶν ἰδιοτήτων τῶν συναρτήσεων Bessel καί νά θεωρήσετε μικρό V_m).
(Θέμα ἐξετάσεων Ὀκτωβρ. 1977)

Λ ύ σ η

Τό διάνυσμα Stokes τῆς ἀπόλωτης δέσμης στήν εἴσοδο τῆς διάταξης εἶναι :

$$\left[S_i\right]_1 = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Ἄν M_1 καί M_2 εἶναι οἱ μῆτρες Mueller τῶν δύο πολωτῶν καί M_K ἡ μήτρα Mueller τοῦ κρυστάλλου, τό διάνυσμα Stokes τῆς τελικῆς δέσμης θά εἶναι :

$$\left[S_i\right]_2 = M_2\, M_K\, M_1 \left[S_i\right]_1 = M \left[S_i\right]_1 \qquad (3)$$

ὅπου M ἡ μήτρα Mueller τοῦ συστήματος. Ἀπό τό σχετικό πίνακα ἔχουμε:

γιά $\vartheta = \frac{\pi}{4}$: $M_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

γιά $\vartheta = 0$: $M_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

γιά $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$: $M_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \beta \end{bmatrix}$ ὅπου $\begin{cases} \mu = \sin\delta \\ \beta = \cos\delta \end{cases}$ (4)

Ὥστε ἡ μήτρα Mueller τοῦ συστήματος εἶναι :

$$M = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-\beta & 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-1 & 0 & \beta-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

β. Τό διάνυσμα Stokes τῆς δέσμης I_2 εἶναι :

$$\left[S_i\right]_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-\beta & 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-1 & 0 & \beta-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} I_1(1-\beta) \\ 0 \\ I_1(\beta-1) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Ἡ ἔνταση, λοιπόν, τῆς τελικῆς δέσμης εἶναι:

$$I_2 = \frac{1}{4} I_1(1-\beta) = \frac{1}{4} I_1(1-\cos\delta) = \frac{I_1}{4}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+kV_m \sin\omega_m t\right)\right)$$

ἤ τέλος

$$\boxed{I_2 = \frac{I_1}{4}\left[1+\sin\left(kV_m \sin\omega_m t\right)\right]} \qquad (7)$$

Ἀλλά ἰσχύει ἡ ἰδιότητα (βλ. πίνακα Ι τοῦ παραρτήματος)

$$\sin(\alpha\sin\beta) = 2J_1(\alpha)\sin\beta + 2J_3(\alpha)\sin 3\beta + \ldots$$

Ὥστε:

$$\sin(kV_m\sin\omega_m t) = 2J_1(kV_m)\sin\omega_m t + 2J_3(kV_m)\sin 3\omega_m t + \ldots \qquad (8)$$

καί $$I_2 = \frac{I_1}{4}\left[1+2J_1(kV_m)\sin\omega_m t + 2J_3(kV_m)\sin 3\omega_m t + \ldots\right] \qquad (9)$$

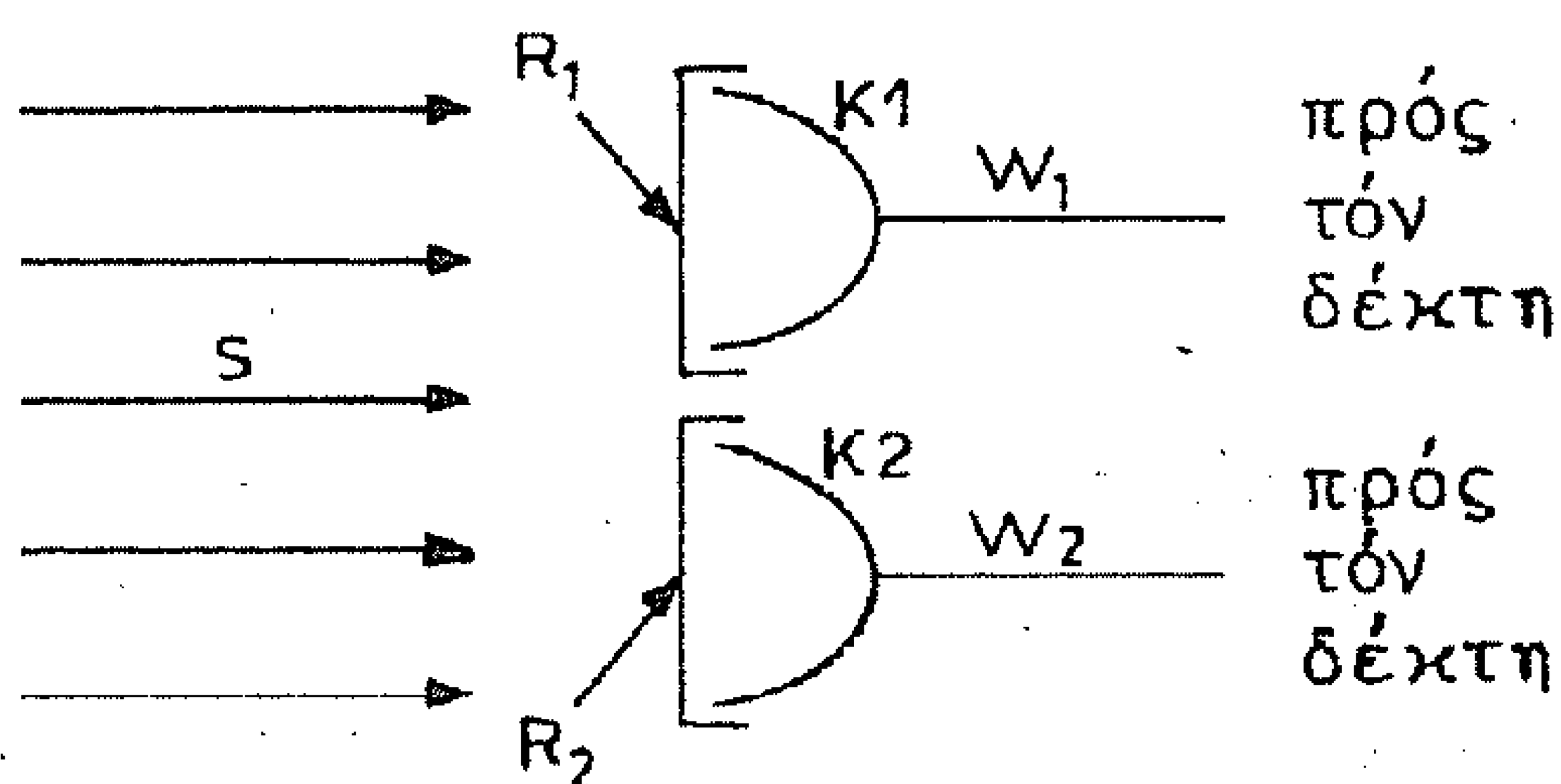
Ἄν περιοριστοῦμε σέ μικρά V_m τά πλάτη τῶν ἀνώτερων ἁρμονικῶν μικραίνουν πάρα πολύ καί εἶναι:

$$\boxed{I_2 \simeq \frac{I_1}{4} + \frac{I_1}{2} J_1(kV_m)\sin\omega_m t} \qquad (10)$$

Ὥστε, ἡ ἔνταση I_2 τῆς τελικῆς δέσμης LASER εἶναι πρακτικά διαμορφωμένη στήν κυκλική συχνότητα ω_m καί μάλιστα μέ βάθος διαμόρφωσης :

$$m = \frac{\frac{I_1}{2} J_1(kV_m)}{I_{1/4}} = 2J_1(kV_m) \qquad (11)$$

7.4 Σ' ἕναν μικροκυματικό σταθμό κάνουμε λήψη τοῦ φέροντος κύματος ἑνός μακρινοῦ πομποῦ μέ τίς δύο παραβολικές κεραῖες τοῦ σχήματος (K1 καί K2). Τό λαμβανόμενο κύμα εἶναι ὁλικά ἐλλειπτικά πολωμένο μέ τό μεγάλο ἄξονα τῆς ἔλλειψης ὁριζόντιο.



Οἱ κεραῖες K1 καί K2 ἔχουν τό ἴδιο ἐνεργό ἄνοιγμα $A=2{,}5\ m^2$ καί ἄν τίς χρησιμοποιούσαμε ὡς κεραῖες ἐκπομπῆς ἡ K1 θά ἀκτινοβολοῦσε ὁριζόντια γραμμικά πολωμένο κύμα, ἐνῶ ἡ K2 θά ἀκτινοβολοῦσε κατακόρυφα γραμμικά πολωμένο κύμα.

Ἡ κεραία K1 καλύπτεται μέ ἕνα προστατευτικό φύλλο διηλεκτρικοῦ (radome) R_1, πού προκαλεῖ ἐξασθένηση 3 dB στήν προσπίπτουσα ἰσχύ, ἐνῶ ἡ K2 καλύπτεται μέ τό radome R_2, πού προκαλεῖ ἐξασθένηση 6 dB στήν προσπίπτουσα ἰσχύ.

Ἄν στό δέκτη τῆς κεραίας K1 λαβαίνουμε ἰσχύ $W_1 = 30\mu W$, ἐνῶ στό δέκτη τῆς K2 λαβαίνουμε ἰσχύ $W_2 = 10\mu W$ καί θεωρήσουμε ὅτι ἡ γραμμή μεταφορᾶς ἀπό τίς κεραῖες στό δέκτη δέν ἔχει ἀπώλειες.

α. Νά προσδιοριστεῖ τό πλάτος τῆς ἔντασης (ἰσχύος ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας) S τοῦ ἐλλειπτικά πολωμένου κύματος.

β. Νά προσδιοριστεῖ τό ἀξονικό πηλίκο ΑΠ τῆς ἔλλειψης πόλωσης τοῦ κύματος.

(Θέμα ἐξετάσεων Ἰουλ. 1977)

(Ἀπ. **α.** $S = 40\ \mu W/m^2$

β. ΑΠ $= 1{,}22$)

7.5 Ἄς θεωρήσουμε γνωστό ὅτι ὁ " βαθμός γραμμικῆς πόλωσης" ἑνός κύματος, πού εἶναι μερικά ἐλλειπτικά πολωμένο, ὁρίζεται ἀπό τό πηλίκο.

$$d_l = \frac{W_{\parallel} - W_{\perp}}{W_{\parallel} + W_{\perp}} \qquad (1)$$

ὅπου $W_{\parallel}$ ἡ ἰσχύς λήψης μιᾶς γραμμικά πολωμένης κεραίας, προσανατολισμένης παράλληλα μέ τό μεγάλο ἄξονα τῆς ἔλλειψης τῆς πόλωσης καί $W_{\perp}$ ἡ ἰσχύς λήψης τῆς ἴδιας κεραίας, προσανατολισμένης κάθετα πρός τό μεγάλο ἄξονα τῆς ἔλλειψης.

Ποιά σχέση συνδέει τόν d_l μέ τό βαθμό πόλωσης d καί τό ἀξονικό πηλίκο ΑΠ; (Θέμα ἐξετάσεων Ὀκτωβρ. 1978)

(Ἀπ. $d_l = d\,\dfrac{(\text{ΑΠ})^2 - 1}{(\text{ΑΠ})^2 + 1}$)

7.6 Ἕνας γεωστατικός δορυφόρος ἐκπέμπει γραμμικά πολωμένη ΗΜ δέσμη πρός ἕνα σταθμό ἐδάφους, πού διαθέτει κεραία λήψης δεξιόστροφα κυκλικά πολωμένη. Ἡ συχνότητα ἐκπομπῆς εἶναι f, ἡ ἀπόσταση "δορυφόρου-σταθμοῦ ἐδάφους" εἶναι l , ἡ μέση ἠλεκτρονική πυκνότητα τῆς διαδρομῆς τοῦ κύματος εἶναι N_e καί ἡ διάδοση θεωρεῖται διαμήκης (δηλ. παράλληλη μέ τό μαγνητικό πεδίο B_0 τῆς γῆς) .

Ἄν ἡ ἀρχική πόλωση τοῦ κύματος σχηματίζει γωνία α μέ τή διεύθυνση Βορρᾶ-Νότου (ἡ διεύθυνση αὐτή παίρνεται σάν ἄξονας τῶν x)

α. Νά δοθεῖ μία σχέση ὑπολογισμοῦ τῆς συνολικῆς στροφῆς Faraday Φ, πού θά ὑποστεῖ τό κύμα ὥσπου νά φτάσει στό σταθμό.

β. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἄν ἀγνοηθεῖ κάθε ἄλλο φαινόμενο ἐκτός ἀπό τή στροφή Faraday, μπορεῖ νά ληφθεῖ σάν μήτρα Mueller τοῦ μέσου, πού διασχίζει τό κύμα κατά τή διαδρομή του ἡ :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\Phi & -\sin 2\Phi & 0 \\ 0 & \sin 2\Phi & \cos 2\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

γ. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἰσχύς λήψης N τῆς κεραίας καί νά ἀποδειχτεῖ ὅτι εἶναι ἀνεπηρέαστη ἀπό τή στροφή Faraday, πού προκαλεῖ τό μέσο τῆς διάδοσης.

(Θέμα ἐξετάσεων Δεκεμβρ. 1978)

('Απ. α. $\Phi = -\dfrac{N_e e^3 B_0 l}{8\pi^2 c\, \varepsilon_0 m^2 f^2}$

γ. $N = \dfrac{SA}{2}$

7.7 α. 'Αναλύοντας τό διάνυσμα Stokes ἑνός μερικά ἐλλειπτικά πολωμένου ΗΜ κύματος μέ ἔνταση S, νά ἀποδειχτεῖ ὅτι τοῦτο μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ σάν ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων Stokes τριῶν κυμάτων :

- Ἑνός (δεξιόστροφα ἤ ἀριστερόστροφα) κυκλικά πολωμένου μέ ἔνταση S_c .
- Ἑνός γραμμικά πολωμένου μέ γωνία πόλωσης $\alpha = \tau$ (δηλ. κατά τόν μεγάλο ἄξονα τῆς ἔλλειψης) καί ἔνταση S_l καί
- Ἑνός έντελῶς ἀπόλωτου μέ ἔνταση S_u .

β. Νά προσδιοριστεῖ ὁ " βαθμός κυκλικῆς πόλωσης "

$$d_c \equiv \frac{S_c}{S}$$

γ. Νά προσδιοριστεῖ ὁ " βαθμός γραμμικῆς πόλωσης " :

$$d_l \equiv \frac{S_l}{S}$$

δ. Νά προσδιοριστεῖ τό ποσοστό τῆς ἀπόλωτης ἰσχύος :

$$d_u = \frac{S_u}{S}$$

ε. Ποιά σχέση συνδέει τά μεγέθη d_c, d_l , καί d_u μεταξύ τους καί ποιά τά d_c καί d_l μετάξύ τους ;

(Δίνονται τά στοιχεῖα S, d καί ε τοῦ ἀρχικοῦ ΗΜ κύματος).

('Απ. β. $d_c = d\,|\sin 2\epsilon|$

γ. $d_l = d\cos 2\epsilon$

δ. $d_u = 1 - d_c - d_l$

ε. $d_c + d_l + d_u = 1$ καί $d_c^2 + d_l^2 = d^2$)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ἡ βιβλιογραφία ἡ σχετική μέ τόν Ἠλεκτρομαγνητισμό εἶναι ἐξαιρετικά ἐκτενής. Περιοριστήκαμε ἐδῶ σέ μερικά μόνο βιβλία, ὅσα θεωρήσαμε ὅτι καλύπτουν ἀρκετά τίς διάφορες ὄψεις τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου καθώς καί σέ μερικά κείμενα στά ἑλληνικά πού θά μποροῦσαν νά βοηθήσουν τόν Ἕλληνα σπουδαστή.

COLLIN R.: "Field Theory of Guided Waves" (Mc Graw 1963).

DURNEY C. and JOHNSON C.: "Introduction to Modern Electromagnetics" (Mc Graw 1969).

ELLIOTT R.: "Electromagnetics" (Mc Graw 1966).

JACKSON W.: "Classical Electrodynamics" (J. Wiley).

KRAUS J.: "Radioastronomy" (Mc Graw 1966).

KRAUS J. and CARVER: "Electromagnetics" (Mc Graw 1973).

LANDAU L. et LIFCHITZ: "Théorie du Champ" (Mir Publishers 1966).

PANOFSKY W. and PHILLIPS M.: "Classical Electricity and Magnetism" (Addison-Wesley 1964).

PLONSEY R. and COLLIN R.: "Principles and Applications of Electromagnetic Fields" (Mc Graw 1961).

QUÉMADA D.: "Ondes Dans les Plasmas" (Hermann 1968).

REITZ and MILFORD.: "Foundations of Electromagnetic Theory" (Addison-Wesley).

SCHWARTZ M.: "Principles of Electrodynamics (Mc Graw 1972).

SOMMERFELD A.: "Electrodynamics" (Ac.Press 1964).

Σέ ἑλληνική γλώσσα:

ALONSO M. καί FINN E.: "Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική" Τόμος 2 (Μετάφραση ἀπό τούς Λ.Κ.Ρεσβάνη καί Τ.Α. Φίλιππα 1979)

ΒΟΥΔΟΥΡΗ Γ.:"Ἠλεκτρομαγνητικά Ἀντηχεῖα" (Ἔκδοση Τ.Ε.Ε.1968. Μία βελτιωμένη καί συμπληρωμένη ἔκδοση: "Cavités Electromagnētiques", Dunod 1971).

GRAWFORD F. et al.: "Ἠλεκτρισμός-Μαγνητισμός" (Μαθήματα Φυσικῆς τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ BERKELEY-Τόμος 2) (Μετάφραση τοῦ Ἐργαστηρίου Φυσικῆς τοῦ ΕΜΠ, 1978).

ΚΑΡΟΥΜΠΑΛΟΥ Κ.: "Θέματα Ἐφαρμοσμένων Μαθηματικῶν" (Ἀθήνα 1968).

ΡΟΪΛΟΥ Μ.: "Ἠλεκτρισμός-Μαγνητισμός" (Πανεπιστήμιο Πατρῶν 1975).

ΑΛΒΑΒΗΤΙΚΟ ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

K